

*Journées*

# **ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES**

Roscoff, 1–5 juin 2015

Anne-Laure Dalibard and Nader Masmoudi

**Phénomène de séparation pour l'équation de Prandtl stationnaire**

*J. É. D. P.* (2015), Exposé n° II, 16 p.

<[http://jedp.cedram.org/item?id=JEDP\\_2015\\_\\_\\_\\_A2\\_0](http://jedp.cedram.org/item?id=JEDP_2015____A2_0)>

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

## Phénomène de séparation pour l'équation de Prandtl stationnaire

Anne-Laure Dalibard      Nader Masmoudi

### Abstract

Cet article est le résumé d'un exposé donné aux journées EDP qui ont eu lieu à la station biologique de Roscoff en juin 2015. Le but est de donner une preuve mathématique du phénomène de séparation de couche limite dans un fluide peu visqueux au voisinage d'un obstacle. Pour cela, on considère la solution de l'équation de Prandtl stationnaire, en présence d'un gradient de pression adverse. On montre que la dérivée normale de la vitesse tangentielle au voisinage de la paroi s'annule pour certaines données initiales, ce qui caractérise physiquement le point de séparation. On calcule également la vitesse d'annulation de cette dérivée.

Cet article est publié sous une forme identique dans les actes du séminaire Laurent Schwartz.

### 1. Introduction

L'équation de Prandtl a été proposée par Ludwig Prandtl en 1904, lors d'un exposé au Congrès international des mathématiciens à Heidelberg. Elle décrit le comportement d'un fluide peu visqueux au voisinage d'une paroi rigide, et est obtenue en passant à la limite (formellement) dans le système de Navier-Stokes avec faible viscosité après un changement d'échelle dans la variable normale au bord. On renvoie le lecteur intéressé à [7, 2] pour plus de détails. On s'intéresse ici à une version stationnaire de cette équation, qui s'écrit

$$\begin{aligned} uu_x + vu_y - u_{yy} &= -\frac{dp_E(x)}{dx}, & x > 0, y > 0, \\ u_x + v_y &= 0, & x > 0, y > 0, \\ u|_{x=0} = u_0, \quad u|_{y=0} &= 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_E(x), \end{aligned} \tag{1.1}$$

où  $y = 0$  représente la paroi rigide,  $x$  (resp.  $y$ ) la variable tangentielle (resp. normale) à la paroi. Les fonctions  $u_E$  et  $p_E$  sont des données du problème, et représentent la vitesse tangentielle du fluide et sa pression à la sortie de la couche limite. Autrement dit,  $u_E$  et  $p_E$  sont respectivement la vitesse tangentielle et la pression près de la paroi d'un fluide vérifiant les équations d'Euler. Les quantités  $u_E$  et  $p_E$  sont reliées par la relation algébrique

$$u_E u'_E = -\frac{dp_E(x)}{dx}.$$

L'équation (1.1) peut être considérée comme une équation d'évolution en  $x$ , avec une condition "initiale" en  $x = 0$ ; en raison du terme de transport  $vu_y$ , cette équation est non-locale, le terme  $v$  étant exprimé en fonction de  $u$  à l'aide de la condition de divergence nulle. Elle s'apparente donc à une équation de type transport-diffusion, et on s'attend à ce que l'équation (1.1) soit (localement) bien posée tant que  $u$  reste positif. Ce résultat a été démontré par O. A. Oleinik (voir [7, Théorème 2.1.1]):

**Proposition 1** (Oleinik). Soit  $\alpha > 0$ ,  $X > 0$ . Soit  $u_0 \in \mathcal{C}_b^{2,\alpha}(\mathbb{R})$  telle que  $u_0(0) = 0$ ,  $u_0'(0) > 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow \infty} u_0(y) = u_E(0) > 0$ , et telle que  $u_0(y) > 0$  pour  $y > 0$ . On suppose que  $dp_E/dx \in \mathcal{C}^1([0, X])$ , et que pour  $y \ll 1$  la condition de compatibilité suivante est vérifiée:

$$u_0''(y) - \frac{dp_E(0)}{dx} = O(y^2). \quad (1.2)$$

Alors il existe  $X^* \leq X$  tel que l'équation (1.1) admet une solution  $u \in \mathcal{C}^1([0, X^*] \times \mathbb{R}_+)$  vérifiant les propriétés suivantes:

- *Régularité et bornes*:  $u$  est bornée et continue dans  $[0, X^*] \times \mathbb{R}_+$ ,  $\partial_y u, \partial_y^2 u$  sont bornées et continues dans  $[0, X^*] \times \mathbb{R}_+$ ,  $\partial_x u, v$  et  $\partial_y v$  sont localement bornées et continues dans  $[0, X^*] \times \mathbb{R}_+$ ;
- *Non-dégénérescence*:  $u(x, y) > 0$  pour tout  $y > 0$ , et il existe  $y_0 > 0$ ,  $m > 0$  tels que  $\partial_y u(x, y) \geq m$  pour tout  $(x, y) \in [0, X^*] \times [0, y_0]$ .
- *Condition suffisante de globalité*: si  $\frac{dp_E(x)}{dx} \leq 0$ , alors la solution est globale, i.e.  $X^* = X$ .

On s'intéresse dans cet article à des cas où la solution de (1.1) n'est pas globale: plus précisément, on considère l'équation (1.1) avec  $dp_E/dx = 1$ , i.e.

$$\begin{aligned} uu_x + vu_y - u_{yy} &= -1, & x > 0, y > 0, \\ u_x + v_y &= 0, & x > 0, y > 0, \\ u|_{x=0} &= u_0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_E(x), \end{aligned} \quad (P)$$

avec  $u_E(x) = \sqrt{2(x_0 - x)} + U_0$ , pour  $x_0 > 0$ ,  $U_0 > 0$ , et  $u_0$  vérifiant les hypothèses de la proposition 1. On sait donc que des solutions locales (en  $x$ ) de (P) existent. Néanmoins, de façon heuristique, on s'attend à ce que le terme source fasse diminuer les valeurs de la vitesse tangentielle  $u$ , et que donc il existe un point  $x^*$  au delà duquel la solution ne puisse être prolongée avec le résultat de la proposition 1. Plus précisément, on vérifie facilement que la condition de compatibilité (1.2) est propagée par (P). Par conséquent, on a  $x^* < +\infty$  si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée:

- (i)  $u_y(x^*, 0) = 0$ ;
- (ii) il existe  $y^* > 0$  tel que  $u(x^*, y^*) = 0$ .

Pour simplifier l'analyse mathématique, on travaillera avec des solutions de (P) croissantes en  $y$ , cette propriété étant propagée par l'équation (P). Cette propriété supplémentaire garantit que la condition (ii) ci-dessus n'est jamais vérifiée. Par conséquent, pour des solutions croissantes en  $y$ , on a  $x^* < \infty$  si et seulement si

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x^*, 0) = 0. \quad (1.3)$$

Dans la littérature physique (voir par exemple [3, 8]), cette condition est utilisée comme caractérisation du "point de séparation".

Les premiers travaux quantitatifs sur ce phénomène remontent à Goldstein [3] et Landau [4, Chapitre 4, §40]. En particulier, Goldstein effectue, grâce à un développement asymptotique en variables auto-similaires, un calcul du profil de la singularité près du point de séparation. Ces calculs sont ensuite repris par Stewartson [8]. Toutefois, ces calculs sont formels, et de surcroît ne permettent pas de calculer tous les coefficients du développement. Indépendamment, Landau donne une autre caractérisation du point de séparation, et propose un argument suggérant que  $\partial_y u|_{y=0} \sim \sqrt{x^* - x}$  près du point de séparation.

Par ailleurs, dans l'article [2] Weinan E annonce un résultat obtenu en collaboration avec Luis Caffarelli. Ce résultat stipule, sous une hypothèse structurelle sur la donnée initiale, que le temps d'existence  $x^*$  des solutions de (P) au sens d'Oleinik est fini, et que la famille  $u_\mu := \frac{1}{\sqrt{\mu}} u(\mu(x^* - x), \mu^{1/4} Y)$  est compacte dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^2)$ . De surcroît l'auteur énonce deux lemmes techniques jouant un rôle clé dans la preuve. Néanmoins, la preuve complète de ce résultat n'a jamais été publiée.

L'objet de cet article est de donner une version plus quantitative du résultat de compacité annoncé par E et Caffarelli. Notre but, en particulier, est d'identifier une classe de données initiales pour lesquelles on a décollement, au sens où

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \partial_y u|_{y=0} = 0$$

pour un certain  $x^*$  dépendant de  $u_0$ , et de calculer le taux d'annulation de  $\partial_y u|_{y=0}$ . Pour cela, on montre la stabilité d'une classe de solutions approchées de l'équation, dont la dérivée première en  $y = 0$  s'annule en un point  $x = x^*$ . En posant  $a_4 = 1/48$ ,  $a_7 = a_4/84$ , les solutions approchées considérées sont définies par

$$u^{\text{app}}(x, y) = C\sqrt{x^* - x}y + \frac{y^2}{2} - a_4y^4 - a_7\frac{1}{C\sqrt{x^* - x}}y^7 \quad \text{pour } y \lesssim (x^* - x)^{1/6},$$

$$u^{\text{app}}(x, y) = \frac{y^2}{2} \quad \text{pour } (x^* - x)^{1/6} \lesssim y \lesssim 1.$$

Les hypothèses nécessaires sur la donnée initiale sont les suivantes:

(H1) Monotonie:  $u_0$  est croissante en  $y$ ;

(H2) Développement limité près de  $y = 0$ : il existe  $\lambda_0 > 0$  et  $\epsilon > 0$  tels que

$$u_0(y) = \lambda_0 y + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{48}y^4 - a_7\lambda_0^{-1}y^7 + o(\lambda_0^{-1}y^7) \quad \forall y \in [0, \lambda_0^{\frac{1}{3}-\epsilon}];$$

(H3) Encadrement des dérivées jusqu'à l'ordre 4: pour  $k = 2, 3, 4$ ,

$$\partial_y^k u_0(y) = O(y^{4-k}) \quad \forall y \in [0, \lambda_0^{\frac{1}{3}-\epsilon}].$$

(H4) Approximation de la solution approchée: il existe des constantes  $C_0 > 0, \eta_0 > 0$  et  $\gamma < 1/4$  (indépendantes de  $\lambda_0$ ) telles que pour  $m$  suffisamment grand,

$$\int_0^\infty \frac{(\partial_y^5(u - u^{\text{app}})(0, y))^2}{(\lambda_0 y + y^2)^4} \frac{dy}{(1 + \lambda_0^{-2\gamma}y)^m} \leq C_0 \lambda_0^{7+\eta_0}.$$

**Théorème 1.** *On suppose que les hypothèses (H1)-(H4) sur  $u_0$  sont vérifiées. Alors il existe  $\delta_0 > 0$  tel que si  $\lambda_0 < \delta_0$ , la solution de (P) avec  $u|_{x=0} = u_0$  possède un point de séparation en  $x^* = O(\lambda_0^2)$ . De plus, on a les propriétés suivantes:*

- *Taux de séparation: soit  $\lambda(x) := \partial_y u(x, 0)$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\lambda(x) \sim C\sqrt{x^* - x}.$$

- *Approximation de la solution approchée: il existe des constantes  $C > 0, \eta > 0$ , telles que pour tout  $x \in (0, x^*)$ ,*

$$\int_0^\infty \frac{(\partial_y^5(u - u^{\text{app}})(x, y))^2}{(\lambda(x)y + y^2)^4} \frac{dy}{(1 + (x^* - x)^{-\gamma}y)^m} \leq C(x^* - x)^{\frac{7}{2}+\eta}.$$

La preuve du théorème 1 repose sur deux ingrédients principaux: d'une part, il faut construire une solution approchée qui possède de bonnes propriétés de stabilité. D'autre part, on montre des estimations d'erreur qui utilisent fortement la structure de l'équation. Le choix de la solution approchée est inspiré des arguments développés par Franck Merle et Pierre Raphaël pour l'étude de singularités et de phénomènes d'explosion dans l'équation de Schrödinger non linéaire (voir [6, 5]). L'idée est d'utiliser l'invariance par changement d'échelle pour effectuer un changement de variables utilisant un paramètre dépendant directement de la solution considérée (dans notre cas, le paramètre sera  $\lambda(x) = \partial_y u(x, 0)$ ). On construit des solutions approchées à l'aide d'un développement de Taylor, et on choisit les solutions approchées ayant la plus petite croissance possible à l'infini.

Dans une seconde étape, on utilise la nature de transport-diffusion de l'équation pour montrer la stabilité des solutions approchées construites. Les estimations d'énergie utilisées exploitent fortement la structure de l'équation. Afin de contrôler certains termes non linéaires, il faut aussi obtenir

des estimations  $L^\infty$  sur les solutions, qui reposent sur une utilisation minutieuse du principe du maximum. Les estimations d'erreur ainsi obtenues pilotent le "taux de modulation", c'est-à-dire  $\lambda_x$ . On clôt les estimations à l'aide d'un argument de bootstrap. Enfin, le résultat de stabilité est traduit dans les variables de départ.

L'organisation de cet article est la suivante: dans la prochaine partie, on introduit les variables auto-similaires, et on construit la solution approchée dans ces nouvelles variables. La section 3 est dédiée aux estimations d'énergie, et la section 4 aux estimations a priori dans  $L^\infty$ , qui sont nécessaires pour traiter certains des termes non-linéaires dans la section 3. Enfin, dans la section 5, on présente l'argument de bootstrap. On donne dans cet article les idées principales et le squelette de la preuve, et on renvoie le lecteur à [1] pour tous les détails.

## 2. Analyse de l'équation en variables autosimilaires

### 2.1. Présentation du changement de variables

Rappelons tout d'abord que l'équation (P) est invariante par changement d'échelle: en effet, si  $(u, v)$  est solution de (P), alors pour tout  $\mu > 0$ , le couple  $(u_\mu, v_\mu)$  défini par

$$\begin{aligned} u_\mu &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} u(\mu x, \mu^{1/4} y), \\ v_\mu &= \mu^{1/4} v(\mu x, \mu^{1/4} y), \end{aligned}$$

est encore solution de (P). Cette invariance d'échelle avait été utilisée par Goldstein [3] puis Stewartson [8] pour essayer de calculer une solution exacte de (P) près du point de séparation sous la forme d'une fonction analytique en certaines variables.

Dans le cas présent, l'idée est de faire un changement de variables qui d'une part respecte cette invariance d'échelle, et d'autre part intègre des informations sur le "taux de séparation", c'est-à-dire la vitesse d'annulation de  $\partial_y u|_{y=0}$ . Cette idée a été introduite par Franck Merle et Pierre Raphaël pour l'analyse de singularités dans l'équation de Schrödinger non linéaire, voir [6, 5].

Plus précisément, on pose

$$\lambda(x) = \partial_y u|_{y=0} \quad \text{et} \quad Y = \frac{y}{\lambda(x)}.$$

On change également de variable horizontale en posant

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\lambda^4(x)}. \tag{2.1}$$

La nouvelle fonction inconnue est

$$U(s, Y) := \lambda^{-2}(x(s)) u(x(s), \lambda(x(s)) Y). \tag{2.2}$$

On vérifie alors que  $U$  est solution de l'équation

$$UU_s - U_Y \int_0^Y U_s - bU^2 + \frac{3b}{2} U_Y \int_0^Y U - U_{YY} = -1, \tag{2.3}$$

où

$$b = -2\lambda_x \lambda^3. \tag{2.4}$$

Les conditions aux limites deviennent alors  $U|_{Y=0} = 0$ ,  $\lim_{Y \rightarrow \infty} U(s, Y) = U_\infty(s)$ , où  $U_\infty$  vérifie  $U_\infty U'_\infty - bU_\infty^2 = -1$ . De plus, grâce à la définition de  $\lambda$ , on a  $\partial_Y U|_{Y=0} = 1$ . Notons que dans les articles de Franck Merle et Pierre Raphaël, les choix des paramètres  $\lambda$  et  $b$  à contrôler viennent de propriétés d'orthogonalité de la quantité  $U - U^{\text{app}}$ . Dans le cas présent, ces propriétés d'orthogonalité une condition d'annulation à un ordre suffisamment élevé en zéro de  $U - U^{\text{app}}$ .

Dans le reste de cet article, on travaille uniquement sur l'équation (2.3). Remarquons que la limite  $x \rightarrow x^*$  correspond à  $s \rightarrow \infty$ . Il s'agit donc de montrer des propriétés de stabilité pour l'équation (2.3).

Plus précisément, dans les nouvelles variables, le théorème 1 s'écrit:

**Proposition 2.** *On définit la solution approchée*

$$U^{app} = \chi \left( \frac{Y}{s^q} \right) [Y - a_4 b Y^4 - a_7 b^2 Y^7 + a_{10} b^3 Y^{10} + a_{11} b^3 Y^{11}] + \frac{1}{b} F(\sqrt{b} Y),$$

où  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  est égale à 1 dans un voisinage de zéro,  $q \in (1/4, 1/3)$ ,  $a_4, a_7, a_{10}, a_{11}$  sont des constantes explicites, et  $F \in C_b^\infty(\mathbb{R})$  est telle que  $F(\xi) = \xi^2/2$  dans un voisinage de zéro.

On suppose que  $U|_{s=s_0}$  vérifie les hypothèses suivantes:

- $U|_{s=s_0}$  est croissante en  $Y$ ;
- $\partial_Y^k U|_{s=s_0} = O(s_0^{-1} Y^{4-k})$  pour  $k = 2, 3, 4$  et pour  $Y \leq C s_0^{1/3}$  avec  $C$  suffisamment grand;
- $U|_{s=s_0} - U^{app} = O(s_0^{-2} Y^7)$  pour  $Y \leq C s_0^{1/3}$ ;
- Il existe  $C_0$  indépendante de  $s_0$ ,  $\eta > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  grand et  $\beta > 1/4$  tels que

$$\int_0^\infty \frac{1}{(Y + Y^2)^4} (\partial_Y^5 (U - U^{app}))^2 (1 + s_0^{-\beta} Y)^{-m} \leq \frac{C_0}{s_0^{4+\eta}}.$$

Alors si  $s_0$  est suffisamment grand, il existe des constantes  $C > 0, \eta' > 0, m \in \mathbb{N}, \beta > 1/4$ , telles que les propriétés suivantes sont vérifiées:

- $b(s) = \frac{1}{s} + O(s^{-1-\eta'})$  quand  $s \rightarrow \infty$ ;
- Pour tout  $s \geq s_0$ ,

$$\int_0^\infty \frac{1}{(Y + Y^2)^2} (\partial_Y^5 (U - U^{app}))^2 (1 + s^{-\beta} Y)^{-m} \leq \frac{C}{s^{4+\eta'}}.$$

**Remarque 1.** *La Proposition 2 contient deux résultats : une estimation d'erreur entre  $U$  et  $U^{app}$ , et une loi asymptotique pour le coefficient  $b$ . En réalité, l'estimation d'erreur va contrôler la loi de  $b$ , mais le point qui nous intéresse au premier chef est le comportement asymptotique de  $b$ . Compte tenu de la définition (2.4) et de la relation (2.1), on a*

$$b(s) = \frac{1}{s} + O(s^{-1-\eta}) \text{ quand } s \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda(x) \sim C \sqrt{x^* - x} \text{ quand } x \rightarrow x^*.$$

Par ailleurs, notons que le comportement asymptotique  $b(s) = \frac{1}{s}$  correspond à l'équation différentielle  $b_s + b^2 = 0$ . Ainsi, dans la suite, le but des estimations sera de contrôler des quantités faisant intervenir  $b_s + b^2$ .

## 2.2. Heuristique de la construction de solutions approchées

On cherche à présent à construire des solutions approchées de (P) qui soient stables. Comme dans les travaux de Merle et Raphaël, cette stabilité n'est vraie que pour certains comportements asymptotiques de la fonction  $b$ : on observe en pratique que les comportements asymptotiques qui correspondent à des taux stables sont ceux pour lesquels les solutions approchées ont la croissance la plus faible possible quand  $Y \rightarrow \infty$ . En effet, plus la solution approchée a une grande croissance à l'infini, plus le terme de reste dans l'équation sur  $U - U^{app}$  est grand. Choisir une solution approchée avec une petite croissance à l'infini revient donc à choisir une solution approchée avec le plus petit terme de reste possible.

La définition des solutions approchées se décompose en trois zones: la zone principale va de 0 à  $s^\alpha$ , pour un  $\alpha > 0$  à définir ultérieurement. Dans cette zone, on commence par calculer un développement de Taylor de la solution autour de zéro, et on cherche à pousser ce développement le plus loin possible, ce qui correspond à la condition de faible croissance énoncée plus haut. Dans la seconde zone, on ne garde que le terme dominant du développement de Taylor, soit  $Y^2/2$ . On vérifie d'ailleurs que  $Y^2/2$  est une solution stationnaire de (2.3), qui correspond à la solution de (P)  $(x, y) \mapsto y^2/2$ , qui est indépendante de  $x$  et invariante par changement d'échelle. Dans la troisième zone, on raccorde  $Y^2/2$  au profil  $\bar{U}(s) \simeq s + 1$ .

- *Développement de Taylor de la solution près de zéro:*

Rappelons tout d'abord que grâce au changement de variables (2.2), on a

$$U(s, 0) = 0, \quad \partial_Y U(s, 0) = 1.$$

On déduit alors de (2.3) que

$$\partial_{YY} U(s, 0) = 1.$$

Les premiers termes du développement de Taylor en zéro sont donc  $Y + \frac{Y^2}{2}$ .

Une première idée naturelle est de définir une suite de polynômes en  $Y$  avec des coefficients dépendants de  $s$  grâce à l'équation de récurrence suivante:

$$U_1(s, Y) := Y + \frac{Y^2}{2},$$

$$\partial_{YY}(U_{N+1} - U_N) := 1 + U_N \partial_s U_N - \partial_Y U_N \int_0^Y \partial_s U_N - b U_N^2 + \frac{3b}{2} \partial_Y U_N \int_0^Y U_N - \partial_{YY} U_N. \quad (2.5)$$

On obtient aisément que

$$U_2(s, Y) := Y + \frac{Y^2}{2} - a_4 b Y^4, \quad \text{avec } a_4 = \frac{1}{48}. \quad (2.6)$$

On regarde alors les termes d'erreur obtenus lorsque l'on remplace  $U$  par  $U_2$  dans (2.3). On a

$$U_2 \partial_s U_2 - \partial_Y U_2 \int_0^Y \partial_s U_2 - b U_2^2 + \frac{3b}{2} \partial_Y U_2 \int_0^Y U_2 - \partial_{YY} U_2 + 1$$

$$= -a_4 \left( \frac{4}{5} b_s + \frac{13}{10} b^2 \right) Y^5 - \frac{3}{10} a_4 (b_s + b^2) Y^6 + a_4^2 \frac{b}{5} (b_s + b^2) Y^8.$$

On rappelle que l'on s'attend à avoir  $b(s) = O(s^{-1})$  quand  $s \rightarrow \infty$ . Par conséquent le coefficient du dernier terme du membre de droite est un ordre de grandeur plus petit que les coefficients des deux premiers termes. On se concentre donc sur la comparaison entre les deux premiers termes du membre de droite.

Le but est alors de choisir la solution approchée qui possède "la plus petite croissance à l'infini". Ce choix, qui peut sembler arbitraire à ce stade, est en réalité lié aux propriétés de stabilité de la solution approchée choisie. En effet, si l'on fait un autre choix que celui que nous nous apprêtons à faire, les estimations de bootstrap ne fonctionnent plus.

Notons que le terme en  $(b_s + b^2) Y^6$  donnerait dans  $U_3$  un terme en  $(b_s + b^2) Y^8$ , tandis que le terme en  $(\frac{4}{5} b_s + \frac{13}{10} b^2) Y^5$  donnerait un terme en  $(\frac{4}{5} b_s + \frac{13}{10} b^2) Y^7$ . Par conséquent, on choisit dans la solution approchée "d'annuler" le terme en  $(b_s + b^2) Y^8$ . Autrement dit, dans l'équation de récurrence (2.5) qui définit la suite  $(U_N)_{N \geq 1}$ , on remplace chaque occurrence de  $b_s$  par  $-b^2$ . On définit ainsi  $U_3$  par

$$U_3(s, Y) = Y + \frac{Y^2}{2} - a_4 b Y^4 - a_7 b^2 Y^7, \quad \text{avec } a_7 = \frac{1}{84} a_4.$$

Notons qu'avec ce choix, on a  $(U - U_3)(s, Y) \sim C(b_s + b^2) Y^7$  pour  $Y \ll 1$ , pour une certaine constante  $C \in \mathbb{R}^*$ . On construit ensuite  $U_4$  et  $U_5$  de façon analogue, toujours en remplaçant  $b_s$  par  $-b^2$ . On obtient une expression de la forme

$$U_5(s, Y) = Y + \frac{Y^2}{2} - a_4 b Y^4 - a_7 b^2 Y^7 + a_{10} b^3 Y^{10} + a_{11} b^3 Y^{11},$$

pour des constantes  $a_{10}, a_{11} \in \mathbb{R}$  explicites.

- *Définition de la solution approchée:*

On définit à présent la solution approchée  $U^{\text{app}}$  de la façon suivante: soit  $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$  telle que  $F(\xi) = \frac{\xi^2}{2}$  pour  $\xi \leq c_0$ , pour un certain  $c_0 > 0$ ,  $F$  croissante, et  $F(\xi) \rightarrow 1$  quand  $\xi \rightarrow \infty$ . Soit  $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+)$  telle que  $\chi \equiv 1$  dans un voisinage de zéro, et soit  $q \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ . On prend

$$U^{\text{app}}(s, Y) := \chi \left( \frac{Y}{s^q} \right) [Y - a_4 b Y^4 - a_7 b^2 Y^7 + a_{10} b^3 Y^{10} + a_{11} b^3 Y^{11}] + \frac{1}{b} F(\sqrt{b} Y). \quad (2.7)$$

Remarquons que  $U^{\text{app}} = U_4$  tant que  $Y \lesssim s^q$ , et que  $U^{\text{app}} \rightarrow \frac{1}{b}$  quand  $Y \rightarrow \infty$ . Ainsi on ne requiert pas que  $U^{\text{app}} - U(s, Y) \rightarrow 0$  quand  $Y \rightarrow \infty$ . Mais ce fait est en réalité sans importance,

car on mesurera l'écart entre  $U$  et  $U^{\text{app}}$  dans des normes à poids, avec des poids qui décroissent polynomialement (avec une grande puissance) après  $s^\beta$ , pour  $\beta \in (1/4, q)$ .

### 3. Estimations d'erreur

Dans toute cette section, on explique comment obtenir des estimations d'erreur sur la quantité  $V := U - U^{\text{app}}$ . On commence pour cela par écrire une équation de type transport-diffusion sur  $V$ . L'énergie utilisée pour mesurer la taille de  $V$  sera une norme quadratique en  $V$  et ses dérivées, avec un poids décroissant polynomialement à partir de  $Y = s^{1/3}$ . Par ailleurs, afin d'avoir un bon contrôle des termes de transport et de diffusion et d'estimer les termes non linéaires apparaissant dans les estimations, il nous faudra également obtenir des estimations de type  $L^\infty$  sur  $U$ , à l'aide d'un encadrement par des sur- et des sous-solutions. Ce dernier point fait l'objet de la section 4.

#### 3.1. Équation sur $V$

On considère l'équation (2.3), et on pose, pour  $W \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ ,

$$L_U W := U W - U_Y \int_0^Y W.$$

On peut remarquer que

$$\frac{L_U W}{U^2} = \partial_Y \left( \frac{\int_0^Y W}{U} \right).$$

On peut donc inverser l'opérateur  $L_U$ , pour des fonctions  $f$  telles que  $f(Y)/Y^2$  est intégrable au voisinage de zéro, et on a alors

$$L_U^{-1} f = \left( U \int_0^Y \frac{f}{U^2} \right)_Y.$$

Par conséquent, l'équation sur  $U$  s'écrit

$$\partial_s U + b L_U^{-1} \left( \frac{3}{2} U_Y \int_0^Y U - U^2 \right) - L_U^{-1} (\partial_{YY} U - 1) = 0.$$

On remarque immédiatement que

$$L_U^{-1}(U^2) = \partial_Y \left( U \int_0^Y 1 \right) = (YU)_Y.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} L_U^{-1} \left( U_Y \int_0^Y U \right) &= L_U^{-1} \left( U_Y \int_0^Y U - U^2 \right) + (YU)_Y \\ &= -L_U^{-1} L_U U + (YU)_Y \\ &= -U + (YU)_Y = YU_Y. \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation sur  $U$  devient

$$\partial_s U - bU + \frac{b}{2} Y \partial_Y U - L_U^{-1} (\partial_{YY} U - 1) = 0. \quad (3.1)$$

Ainsi toute la non-linéarité de l'équation de départ est à présent incluse dans le terme de diffusion  $L_U^{-1} (\partial_{YY} U - 1)$ .

L'équation sur  $V = U - U^{\text{app}}$  s'écrit donc, en posant  $\mathcal{L}_U := L_U^{-1} \partial_{YY}$ ,

$$\partial_s V - bV + \frac{b}{2} Y \partial_Y V - \mathcal{L}_U V - L_U^{-1} (\partial_{YY} U^{\text{app}} - 1) = - \left( \partial_s U^{\text{app}} - bU^{\text{app}} + \frac{b}{2} Y \partial_Y U^{\text{app}} \right). \quad (3.2)$$

On a le résultat suivant (voir [1]):



**Lemme 1.**

$$L_U^{-1}(\partial_{Y^2} U^{app} - 1) = -\frac{b}{2}Y + \frac{b}{2}L_U^{-1}L_V Y \\ + L_U^{-1} \left( \chi \left( \frac{Y}{s^q} \right) \left( \frac{5}{4}a_7 + 90a_{10} \right) b^3 Y^8 + 110a_{11} b^3 Y^9 \right) + G_1(s, Y) \varphi \left( \frac{Y}{s^q} \right),$$

où  $G_1 \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$  a une croissance au plus polynomiale en  $s$  et en  $Y$ , et  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$  est bornée, avec  $\varphi \equiv 0$  dans un voisinage de zéro.

Par ailleurs,

$$\partial_s U^{app} - bU^{app} + \frac{b}{2}Y \partial_Y U^{app} \\ = \chi \left( \frac{Y}{s^q} \right) \left[ -\frac{b}{2}Y - a_4(b_s + b^2)Y^4 - a_7b \left( 2b_s + \frac{5b^2}{2} \right) Y^7 \right] \\ + \chi \left( \frac{Y}{s^q} \right) [a_{10}(3b_s b^2 + 4b^4)Y^{10} + a_{11}(3b_s b^2 + 9b^4/2)Y^{11}] \\ + \chi' \left( \frac{Y}{s^q} \right) \frac{Y}{s^q} \left( \frac{b}{2} - \frac{q}{s} \right) [Y - a_4 b Y^4 - a_7 b^2 Y^7 + a_{10} b^3 Y^{10} + a_{11} b^3 Y^{11}] \\ + b^{-2} (b_s + b^2) \left( \frac{1}{2} Z F'(Z) - F(Z) \right) \Big|_{Z=\sqrt{b}Y}.$$

En utilisant les valeurs explicites de  $a_{10}$  et  $a_{11}$ , on en déduit finalement que  $V$  vérifie l'équation

$$\partial_s V - bV + \frac{b}{2}Y \partial_Y V + \frac{b}{2}L_U^{-1} \left( \frac{Y^2}{2} \partial_Y V - YV \right) - \mathcal{L}_U V = \mathcal{R}, \quad (3.3)$$

où

$$\mathcal{R} = \chi \left( \frac{Y}{s^q} \right) [a_4(b_s + b^2)Y^4 + 2a_7b(b_s + b^2)Y^7] \\ - \chi \left( \frac{Y}{s^q} \right) [a_{10}(3b_s b^2 + 4b^4)Y^{10} + a_{11}(3b_s b^2 + 9b^4/2)Y^{11}] \\ + \frac{a_7 b^3}{2} L_U^{-1} \left( \chi \left( \frac{Y}{s^q} \right) (L_V Y^7 + L_{-a_4 b Y^4 - a_7 b^2 Y^7 + a_{10} b^3 Y^{10} + a_{11} b^3 Y^{11}} Y^7) \right) \\ + G_2(s, Y) \varphi \left( \frac{Y}{s^q} \right),$$

et la fonction  $G_2$  possède les mêmes propriétés que la fonction  $G_1$  du Lemme 1.

Les estimations d'énergie reposent alors sur les idées suivantes:

1. Comme  $V(s, Y) \sim C(b_s + b^2)Y^7$  pour  $Y \ll 1$ , toute norme  $\mathcal{N}(V)$  contrôlant  $|VY^{-7}|_{Y=0}$  contrôle également  $|b_s + b^2|$ .

2. On définit une énergie  $E(s)$  par

$$E(s) = \mathcal{N}(V(s))^2,$$

où  $\mathcal{N}$  est une (semi-)norme contrôlant  $|VY^{-7}|_{Y=0}$  qui sera définie ultérieurement. Pour montrer que  $b_s + b^2 = O(s^{-2-\eta})$  pour un certain  $\eta > 0$ , il suffit de montrer que

$$\frac{dE}{ds} + \frac{\alpha}{s} E(s) \leq C s^{-5-\eta} \quad (3.4)$$

avec  $\eta > 0$  et  $\alpha \geq 4 + \eta$ .

3. La propriété  $\alpha > 4$  dans (3.4) est obtenue à l'aide d'opérations algébriques sur (3.3). Typiquement, si on ne conserve que la partie transport de (3.3) et que l'on considère l'équation modèle

$$\partial_s f - \frac{1}{s} f + \frac{1}{2s} Y \partial_Y f = r,$$

on voit que

$$\frac{d}{ds} \|\partial_Y^7 f\|_{H^1}^2 + \frac{9}{2} \|\partial_Y^7 f\|_{H^1}^2 \leq \left| \int \partial_Y^7 r \partial_Y^7 f \right| + \left| \int \partial_Y^8 r \partial_Y^8 f \right|.$$

On obtient donc le résultat voulu avec  $\alpha = \frac{9}{2}$  et  $\mathcal{N}(f) := \|\partial_Y^7 f\|_{H^1}$ .

4. Le fait que le terme de reste soit  $O(s^{-5-\eta})$  dans (3.4) vient d'un bon choix de la solution approchée. En particulier, le lecteur pourra vérifier que si l'on ne choisit pas la solution approchée avec la plus petite croissance à l'infini, comme expliqué au paragraphe 2.2, alors le terme de reste n'est pas suffisamment petit et on ne peut pas conclure.

Dans les paragraphes qui suivent, on donne quelques éléments de preuve sur l'obtention d'estimations d'énergie. Les difficultés résident principalement dans la structure complexe de l'opérateur de diffusion  $\mathcal{L}_U$ . L'idée est d'appliquer plusieurs fois l'opérateur  $\mathcal{L}_U$  à (3.3), mais cela nécessite de calculer le commutateur de  $\mathcal{L}_U$  avec  $\partial_s + \frac{b}{2} Y \partial_Y$ , de comprendre l'action de  $\mathcal{L}_U$  sur le terme de transport supplémentaire  $L_U^{-1}(L_V Y)$ , et enfin d'obtenir des estimations d'énergie pour des équations de transport-diffusion du type

$$\partial_s f + CbY \partial_Y f - \mathcal{L}_U f = r.$$

On discute de ces trois points dans les paragraphes qui suivent.

### 3.2. Commutateur de $\mathcal{L}_U$ avec $\partial_s + \frac{b}{2} Y \partial_Y$

**Lemme 2.** Soit  $W \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$  telle que  $W(s, Y) = O(Y^2)$  pour  $Y \ll 1$ . Alors

$$\left[ L_U^{-1}, \partial_s + \frac{b}{2} Y \partial_Y \right] W = b L_U^{-1} W - \left( \mathcal{D} \int_0^Y \frac{W}{U^2} \right)_Y + 2 \left( U \int_0^Y \frac{W}{U^3} \mathcal{D} \right)_Y,$$

où  $\mathcal{D} := L_U^{-1}(\partial_{Y^2} U - 1)$ .

Le terme  $\mathcal{D}$  est ensuite décomposé à l'aide du Lemme 1. On écrit

$$\mathcal{D} = -\frac{b}{2} Y + \mathcal{D}_{NL} + \mathcal{D}_{\text{reste}},$$

où  $\mathcal{D}_{NL} = \mathcal{L}_U V + \frac{b}{2} L_U^{-1}(L_V Y)$ , et  $\mathcal{D}_{\text{reste}} = O(b^3 Y^6 \chi(Y/s^\alpha)) + G_1(s, Y) \varphi\left(\frac{Y}{s^\alpha}\right)$ .

**Remarque 2** (Traitement des termes non-linéaires et estimations itérées). Le terme  $\mathcal{D}_{NL}$  crée des non-linéarités dans l'équation sur  $V$  à chaque fois que  $\mathcal{L}_U$  est appliqué à (3.3). Ces non-linéarités nécessitent l'obtention d'estimations préliminaires sur  $V$ . Les estimations  $L^\infty$  qui seront abordées dans la section 4 ne sont pas tout-à-fait suffisantes pour traiter les termes non-linéaires. Ainsi on commence par obtenir une estimation  $H^s$  à poids sur  $V$ , qui est purement linéaire. Cette estimation linéaire est ensuite utilisée pour contrôler les termes non linéaires provenant de  $\mathcal{D}_{NL}$  dans une nouvelle estimation  $H^1$  à poids sur  $\mathcal{L}_U V$ . Enfin, l'estimation linéaire sur  $V$  et l'estimation non-linéaire sur  $\mathcal{L}_U V$  sont utilisées pour contrôler les termes non-linéaires dans l'estimation finale sur  $\mathcal{L}_U^2 V$ .

### 3.3. Estimations successives sur $\mathcal{L}_U^k V$ , $0 \leq k \leq 2$

Les difficultés des estimations viennent principalement du terme de diffusion, dont l'exploitation des propriétés de positivité nécessite des manipulations algébriques fines. On utilisera principalement deux types d'estimations. L'estimation la plus naturelle provient de l'observation suivante: si  $f$  est une fonction régulière s'annulant à un ordre suffisamment grand en zéro, alors une simple intégration par parties montre que pour tout poids  $w \geq 0$  à décroissance suffisamment grande à l'infini,

$$\int_0^\infty \mathcal{L}_U f \partial_{Y^2} f w = \int_0^\infty \mathcal{L}_U f L_U \mathcal{L}_U f w = \int_0^\infty U (\mathcal{L}_U f)^2 w + \frac{1}{2} (U_Y w)_Y \left( \int_0^Y \mathcal{L}_U f \right)^2. \quad (3.5)$$

Le premier des deux termes est toujours positif. L'intégrande du second terme est positif tant que  $Y \leq s^{1/2}$  et  $|w_Y| \leq cY$  avec  $c$  petit. Il change de signe pour  $Y$  assez grand. Ce défaut de positivité

à  $Y$  grand peut être compensé par l'ajout d'un terme d'ordre inférieur (voir la Proposition 4 ci-dessous).

Cependant, cette estimation ne peut être utilisée pour l'estimation sur  $V$ . En effet, dans l'équation (3.3), le terme d'ordre zéro  $-bV$  a tendance à faire croître les estimations d'énergie. Ainsi on ne peut obtenir directement de "bonne" estimation  $L^2$  sur  $V$ . Des estimations  $L^2$  décroissantes peuvent être obtenues, théoriquement, en dérivant l'équation par rapport à  $Y$  ou en utilisant des poids  $w$  décroissants et singuliers (en  $Y^{-k}$ ). Mais ces deux types de manipulations interdisent l'utilisation directe du calcul ci-dessus, et il faut donc exhiber un autre type de structure positive dans le terme de diffusion.

En résumé, on utilisera:

- une première estimation, permettant d'évaluer  $\|\partial_Y^2 V\|_{L^2(w_2)}^2 + \|\partial_Y^3 V\|_{L^2(w_3)}^2$ , avec des poids  $w_2$  et  $w_3$  singuliers en zéro et décroissants (voir la remarque 3 pour une définition précise);
- une deuxième estimation, reposant sur (3.5), et permettant d'évaluer  $\|\partial_Y \mathcal{L}_U V\|_{L^2(w)}$  et  $\|\partial_Y \mathcal{L}_U^2 V\|_{L^2(w)}$ , avec un poids  $w$  régulier, lentement variable, et tel que  $w \simeq 1$  tant que  $Y \ll s^{1/4}$ .

▷ Estimation  $H^1$  sur  $\partial_Y^2 V$ .

En dérivant deux fois (3.3), on voit que  $\partial_Y^2 V$  est solution de

$$\partial_s \partial_Y^2 V + \frac{b}{2} Y \partial_Y^3 V + \frac{b}{2} \partial_Y^2 L_U^{-1} \left( \frac{Y^2}{2} V_Y - YV \right) - \partial_Y^2 \mathcal{L}_U V = \partial_Y^2 \mathcal{R}.$$

À présent le terme d'ordre zéro a disparu, et tout poids décroissant et singulier conduira à une décroissance de l'énergie, pourvu que le terme de diffusion correspondant soit positif. Le terme additionnel  $\partial_Y^2 L_U^{-1} \left( \frac{Y^2}{2} V_Y - YV \right)$  peut être traité perturbativement. Pour le terme de diffusion, on utilise le résultat suivant:

**Lemme 3.** *Pour toute fonction  $W$  s'annulant à un ordre suffisant au voisinage de  $Y = 0$ , on a*

$$\begin{aligned} \partial_Y^2 L_U^{-1} W &= \partial_Y^3 U \int_0^Y \frac{W}{U^2} + \partial_Y^2 U \frac{W}{U^2} - \partial_Y U \frac{\partial_Y W}{U^2} + \frac{\partial_Y^2 W}{U} \\ &= \partial_Y^3 U \int_0^Y \frac{W}{U^2} + \partial_Y^2 U \frac{W}{U^2} + \partial_Y \frac{\partial_Y W}{U} \end{aligned}$$

et

$$\partial_Y^3 L_U^{-1} W = \partial_Y^4 U \int_0^Y \frac{W}{U^2} + 2 \left( \frac{U \partial_Y^3 U - U_{YY} U_Y}{U^3} \right) W + 2 \frac{U_Y^2}{U^3} \partial_Y W - 2 \frac{U_Y}{U^2} \partial_{YY} W + \frac{\partial_Y^3 W}{U}.$$

La première des deux identités conduit naturellement à multiplier l'équation sur  $\partial_Y^2 V$  par  $\partial_Y \left( \frac{\partial_Y^3 V}{U} \right)$ . Ainsi le terme d'ordre le plus élevé possède un signe positif. Pour contrôler les termes d'ordre inférieur du terme de diffusion, on ajoute des termes d'ordre inférieur dans l'énergie. Le résultat final est le suivant:

**Proposition 3** (Estimations préliminaires sur  $V$ ). *Pour  $m \in \mathbb{N}, \beta \in (\frac{3}{10}, \frac{1}{3})$ , on définit le poids  $w_{m,\beta}(s, Y) := (1 + s^{-\beta} Y)^{-m}$ .*

*On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées:*

- $b_s = O(s^{-1})$  et  $\frac{1-\epsilon}{s} \leq b \leq \frac{1+\epsilon}{s}$  si  $s \in [s_0, s_1]$ ;
- $1 - CbY^2 \leq U_{YY} \leq 1$  pour  $Y \leq s^{\beta'}$  avec  $\beta' \in ]\beta, \frac{1}{3}[$  pour un certain  $C$  indépendant de  $s$ ;
- $|\partial_Y^3 U| \leq CbY, |\partial_Y^4 U| \leq Cb$  pour  $Y \leq s^{\beta'}$ ;

Soit

$$\begin{aligned} E_0(s) &:= \int_0^\infty \frac{(\partial_Y^3 V^0)^2}{U} w_{m,\beta} + \frac{7}{8} \int_0^\infty \frac{(\partial_Y^2 V^0)^2}{U^3} w_{m,\beta}, \\ D_0(s) &:= \frac{1}{8} \int_0^\infty \frac{(\partial_Y^3 V^0)^2}{YU^3} w_{m,\beta} + \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{(\partial_Y^2 V^0)^2}{U^5} w_{m,\beta}. \end{aligned}$$

Alors il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $\alpha < \frac{3}{2}$ , pour  $m \in \mathbb{N}$  suffisamment grand et  $s > s_0$  suffisamment grand,

$$\frac{d}{dt}E_0(s) + \alpha b E_0(s) + D_0(s) \leq C_{\alpha,\beta,m} s^{-5/2-\delta}.$$

Par conséquent, pour tout  $\alpha < \frac{3}{2}(1 - \epsilon)$ , on a, pour  $s \in (s_0, s_1)$ ,

$$E_0(s) \leq (C_{\alpha,\beta,m} + E(s_0)s_0^\alpha)s^{-\alpha}, \quad \int_{s_0}^{s_1} s^\alpha D_0(s) ds \leq (C_{\alpha,\beta,m} + E(s_0)s_0^\alpha).$$

**Remarque 3.** Dans la proposition ci-dessus, on a donc choisi  $w_2 = \overline{w_{m,\beta}}/U^3$  et  $w_3 = w_{m,\beta}/U$ , en reprenant les notations de la discussion qui précède la proposition.

▷ Estimation  $H^1$  sur  $\mathcal{L}_U V$  et  $\mathcal{L}_U^2 V$ .

Pour les estimations sur  $\mathcal{L}_U V$  et  $\mathcal{L}_U^2 V$ , on utilise la structure suivante du terme de diffusion, qui repose sur le calcul (3.5):

**Lemme 4.** Soit  $\delta > 0$  quelconque. On suppose que les hypothèses de la Proposition 3 sont vérifiées, et qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\|W\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \|\mathcal{L}_U W\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = O(s^a)$ . On définit, pour  $W \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}_+)$  s'annulant suffisamment près de zéro,

$$D(W) := \int_0^\infty \mathcal{L}_U W (\partial_Y W w_{m,\beta})_Y - \int_0^\infty W \mathcal{L}_U W \partial_{YY} w_{m,\beta}.$$

Alors on peut choisir  $m = m(\delta)$  suffisamment grand, tel que pour tout  $\beta > 1/4$ ,

$$\begin{aligned} D(W) \geq \frac{1}{2} \int_0^\infty U (\mathcal{L}_U W)^2 w_{m,\beta} + \frac{1}{8} \int_0^\infty \left( \int_0^Y \mathcal{L}_U W \right)^2 w_{m,\beta} \\ - \delta b \int_0^\infty W^2 \partial_{YY} w_{m,\beta} - \delta b \int_0^\infty (\partial_Y W)^2 w_{m,\beta} - C_\delta s^{-6}. \end{aligned}$$

**Remarque 4.** Le lemme 4 sera appliqué à  $W = \mathcal{L}_U V$  puis à  $W = \mathcal{L}_U^2 V$ .

Grâce au Lemme 2, l'équation sur  $\mathcal{L}_U V$  est

$$\begin{aligned} \partial_s \mathcal{L}_U V + b \mathcal{L}_U V + \frac{b}{2} Y \partial_Y \mathcal{L}_U V + \frac{b}{2} \mathcal{M}_U V - \mathcal{L}_U^2 V \\ = \mathcal{L}_U \mathcal{R} - \left( (\mathcal{D}_{NL} + \tilde{\mathcal{D}}) \int_0^Y \frac{\partial_Y^2 V}{U^2} \right)_Y + 2 \left( U \int_0^Y \frac{\partial_Y^2 V}{U^3} (\tilde{\mathcal{D}} + \mathcal{D}_{NL}) \right)_Y, \end{aligned} \quad (3.6)$$

où l'opérateur  $\mathcal{M}_U$  est défini par

$$\mathcal{M}_U V := \left( Y \int_0^Y \frac{\partial_Y^2 V}{U^2} \right)_Y - 2 \left( U \int_0^Y \frac{\partial_Y^2 V}{U^3} Y \right)_Y - \mathcal{L}_U L_U^{-1} \left( YV - \frac{Y^2}{2} V_Y \right).$$

Comme cela est suggéré par le Lemme 4, on multiplie (3.6) par

$$-(\partial_Y \mathcal{L}_U V w_{m',\beta'})_Y + \mathcal{L}_U V \partial_{YY} w_{m',\beta'}.$$

Les termes d'énergie et de dissipation correspondants sont alors

$$E_1(s) := \|\partial_Y \mathcal{L}_U V\|_{L^2(w_{m',\beta'})}^2 + \|\mathcal{L}_U V\|_{L^2(\partial_{YY} w_{m',\beta'})}^2,$$

$$D_1(s) := \frac{1}{2} \int_0^\infty U (\mathcal{L}_U^2 V)^2 w_{m,\beta} + \frac{1}{8} \int_0^\infty \left( \int_0^Y \mathcal{L}_U^2 V \right)^2 w_{m,\beta}.$$

Les estimations a priori  $L^\infty$  et la Proposition 3 sont suffisantes pour estimer les termes non-linéaires provenant de  $\mathcal{D}_{NL}$ , pourvu que l'on prenne  $m' > m$  et  $\beta' < \beta$ . Pour le terme provenant de  $\mathcal{M}_U V$ , on se contente d'une estimation grossière: on montre que

$$\begin{aligned} b \left| \mathcal{M}_U V \left( -(\partial_Y \mathcal{L}_U V w_{m',\beta'})_Y + \mathcal{L}_U V \partial_{YY} w_{m',\beta'} \right) \right| \\ \leq b \int_0^\infty (\partial_Y \mathcal{L}_U V)^2 \frac{w_{m',\beta'}}{1+Y} + b \int_0^\infty (\mathcal{L}_U V)^2 \frac{\partial_{YY} w_{m',\beta'}}{1+Y} \\ \leq \delta b E_1(s) + \delta D_1(s) \end{aligned}$$

pour tout  $\delta > 0$  et pour  $s \geq s_\delta$  suffisamment grand.

On en déduit finalement l'estimation suivante:

**Proposition 4.** *On suppose que les hypothèses de la Proposition 3 sont vérifiées. Alors pour tout  $\alpha < \frac{5}{2}$ , pour  $s$  suffisamment grand,*

$$\frac{d}{dt}E_1(s) + \alpha b E_1(s) + D_1(s) \leq C_{\alpha, \beta', m'} s^{-3-\beta}.$$

Par conséquent, pour tout  $\alpha < 2 + \beta$  et pour  $\epsilon$  suffisamment petit, on a, pour  $s \in (s_0, s_1)$ ,

$$E_1(s) \leq (C_{\alpha, \beta', m'} + E_1(s_0)s_0^\alpha)s^{-\alpha}, \quad \int_{s_0}^{s_1} s^\alpha D_1(s) ds \leq (C_{\alpha, \beta', m'} + E_1(s_0)s_0^\alpha).$$

On applique de nouveau l'opérateur  $\mathcal{L}_U$  et on obtient

$$\begin{aligned} \partial_s \mathcal{L}_U^2 V + 3b \mathcal{L}_U^2 V + \frac{b}{2} Y \partial_Y \mathcal{L}_U^2 V + \frac{b}{2} \mathcal{N} \mathcal{L}_U V - \mathcal{L}_U^3 V \\ = \mathcal{L}_U^2 \mathcal{R} + L_U^{-1} \partial_Y^3 \left( 2U \int_0^Y \frac{\partial_Y^2 V}{U^3} (\mathcal{D}_{NL} + \tilde{\mathcal{D}}) - (\mathcal{D}_{NL} + \tilde{\mathcal{D}}) \int_0^Y \frac{\partial_Y^2 V}{U^2} \right) \\ + \frac{b}{2} L_U^{-1} \left( \partial_Y^3 U \int_0^Y \frac{\partial_Y^2 V}{U^3} Y \right), \end{aligned}$$

où l'opérateur  $\mathcal{N}$  est un opérateur linéaire, qui a de bonnes propriétés de positivité au voisinage de  $Y = 0$  et que l'on peut traiter perturbativement pour  $Y \gg 1$ . On pose donc, avec  $m'' > m' > m$ ,  $\beta'' < \beta' < \beta$ ,

$$\begin{aligned} E_2(s) &:= \|\partial_Y \mathcal{L}_U^2 V\|_{L^2(w_{m'', \beta''})}^2 + \|\mathcal{L}_U^2 V\|_{L^2(\partial_{Y^*} w_{m'', \beta''})}^2, \\ D_2(s) &:= \frac{1}{2} \int_0^\infty U (\mathcal{L}_U^3 V)^2 w_{m'', \beta''} + \frac{1}{8} \int_0^\infty \left( \int_0^Y \mathcal{L}_U^3 V \right)^2 w_{m'', \beta''}. \end{aligned}$$

On obtient alors le résultat suivant:

**Proposition 5.** *On suppose que les hypothèses de la Proposition 3 sont vérifiées. Alors il existe  $\alpha > 4$ ,  $\eta > \alpha - 4$  et une constante  $C_{m'', \beta'', \alpha, \eta}$  tels que*

$$\frac{dE_2}{ds} + \alpha b E_2 + D_2(s) \leq C_{m'', \beta'', \alpha, \eta} s^{-5-\eta}.$$

Par conséquent, pour  $\epsilon$  suffisamment petit, on a, pour  $s \in (s_0, s_1)$ ,

$$E_2(s) \leq (C_{\alpha, \beta', m'} + E_2(s_0)s_0^\alpha)s^{-\alpha}, \quad \int_{s_0}^{s_1} s^\alpha D_2(s) ds \leq (C_{\alpha, \beta', m'} + E_2(s_0)s_0^\alpha).$$

**Remarque 5.** *Notons que  $\mathcal{L}_U^2 V \sim C(b_s + b^2)Y$  et  $\partial_Y \mathcal{L}_U^2 V \sim C(b_s + b^2)$  près de  $Y = 0$ . Néanmoins  $E_2$  ne contrôle pas tout-à-fait  $|b_s + b^2|$ : il faut pour cela ajouter à  $E_2$  des termes en  $\partial_Y^2 \mathcal{L}_U^2 V$ , puis utiliser un résultat de trace. Cette dernière estimation est dans l'esprit des estimations de la Proposition 3, et on réfère à [1] pour les détails.*

Le résultat final est le suivant:

**Proposition 6.** *On suppose que les hypothèses de la Proposition 3 sont vérifiées. Alors il existe une constante  $C$  et une constante  $\eta > 0$  telle que pour tout  $s \in [s_0, s_1]$ ,*

$$|b_s + b^2| \leq C s^{-2-\eta}.$$

#### 4. Estimations $L^\infty$

Cette section est dédiée au second pendant de l'argument de bootstrap, qui consiste à obtenir les estimations  $L^\infty$  nécessaires à la Proposition 3, par exemple. Ces estimations découlent de l'utilisation du principe du maximum pour l'équation (2.3). L'existence d'un principe du maximum pour cette équation avait été démontrée par Oleinik (voir [7]), à l'aide du changement de variables de von Mises, qui transforme l'équation de Prandtl (P) (ou encore (2.3)) en une équation de

transport-diffusion non linéaire. L'idée est donc de construire des sur et des sous-solutions de l'équation (2.3), qui s'appuient sur l'expression de la solution approchée, qui vont donner un encadrement assez fin de  $U(s, Y)$ . Ensuite, on applique la même idée aux dérivées successives de  $U$ .

Avant d'énoncer les principaux résultats relatifs aux estimations  $L^\infty$ , rappelons le changement de variables de von Mises: on définit la fonction courant  $\psi$  par

$$\psi(s, Y) := \int_0^Y U(s, Y') dY'.$$

Alors pour tout  $s$ ,  $Y \mapsto \psi(s, Y)$  est un difféomorphisme. Par conséquent, on peut exprimer  $W := U^2$  en fonction des nouvelles variables  $s, \psi$ . L'équation vérifiée par  $W$  dans ces nouvelles variables est

$$\partial_s W - 2bW + \frac{3b}{2}\psi\partial_\psi W - \sqrt{W}\partial_\psi^2 W = -2. \quad (4.1)$$

Notons que pour toute sur- (resp. sous-) solution  $\bar{U}$  (resp.  $\underline{U}$ ), on peut définir de façon similaire une fonction  $\bar{W}$  (resp.  $\underline{W}$ ). La construction des sur et des sous-solutions exposée ci-après fait intervenir un taux auxiliaire  $\tilde{b}$  défini par

$$\tilde{b}_s + b\tilde{b} = 0, \quad \tilde{b}|_{s=s_0} = \frac{1}{s_0}. \quad (4.2)$$

Les sur- et sous-solutions sont définies par

$$\begin{aligned} \bar{U}(s, Y) &:= \begin{cases} \bar{\lambda}Y + \frac{Y^2}{2} - a_4\tilde{b}\bar{\mu}Y^4 & \text{si } Y \leq \tilde{c}\tilde{b}^{-1/3}, \\ \frac{Y^2}{2} + \tilde{b}^{-1/3}\bar{F}(Y\tilde{b}^{1/3}) & \text{si } Y \geq \tilde{c}\tilde{b}^{-1/3}, \end{cases} \\ \underline{U}(s, Y) &:= \begin{cases} \underline{\lambda}Y + \frac{Y^2}{2} - a_4\tilde{b}\underline{\mu}Y^4 & \text{si } Y \leq \tilde{c}\tilde{b}^{-1/3}, \\ \frac{Y^2}{2} + \tilde{b}^{-1/3}\underline{F}(Y\tilde{b}^{1/3}) & \text{si } Y \geq \tilde{c}\tilde{b}^{-1/3}, \end{cases} \end{aligned}$$

pour des paramètres  $\bar{\lambda} > 1, \bar{\mu} > 1, c, \underline{\lambda} < 1, \underline{\mu} < 1$  et des fonctions  $\bar{F}, \underline{F}$  convenablement choisis. Indiquons simplement que la fonction  $\bar{F}$  est croissante, que  $\underline{F}$  est concave, et qu'il existe  $Y(s) \geq \tilde{c}\tilde{b}^{-1/3}$  tel que  $\underline{U}(s, Y(s)) = 0$ .

Le comportement de la fonction  $\tilde{b}$ , qui intervient à plusieurs reprises dans les sur- et sous-solutions, est piloté par le lemme suivant:

**Lemme 5.** *On suppose qu'il existe des constantes  $K > 0, \eta > 0$  et  $\epsilon > 0$  telles que pour tout  $s \in [s_0, s_1]$ ,*

$$\begin{aligned} |b_s + b^2| &\leq \frac{K}{s^{2+\eta}}, \\ \frac{1-\epsilon}{s} &\leq b(s) \leq \frac{1+\epsilon}{s}. \end{aligned}$$

Pour  $s \geq s_0$ , on définit  $\tilde{b}$  par (4.2). Alors si  $s_0$  est suffisamment grand, pour tout  $s \geq s_0$ ,

$$\frac{1-2\epsilon}{s} \leq \tilde{b}(s) \leq \frac{1+2\epsilon}{s}.$$

Le premier résultat est un encadrement de  $U(s, Y)$ :

**Proposition 7.** *On suppose que les hypothèses du Lemme 5 sont vérifiées et que, pour un choix convenable des paramètres  $\bar{\lambda} > 1, \bar{\mu} > 1, c, \underline{\lambda} < 1, \underline{\mu} < 1$  et des fonctions  $\bar{F}, \underline{F}$ , on a*

$$\begin{aligned} W(s_0, \psi) &\leq \bar{W}(s_0, \psi) \quad \forall \psi \geq 0, \\ W(s_0, \psi) &\geq \underline{W}(s_0, \psi) \quad \forall \psi \in [0, \phi(s_0)], \end{aligned}$$

où  $\phi(s) > 0$  est défini par l'équation implicite  $\underline{W}(s, \phi(s)) = 0$ .

Alors pour tout  $s \geq s_0, Y \geq 0$ ,

$$U(s, Y) \leq \inf(\bar{U}(s, Y), U_E(s)),$$

et pour tout  $s \geq s_0$ ,

$$\begin{aligned} U(s, Y) &\geq \underline{U}(s, Y) \quad \text{pour tout } Y \leq \tilde{c}\tilde{b}^{-1/3}, \\ \text{et } U(s, Y) &\geq Cs^{2/3} \quad \text{pour } Y \geq \tilde{c}\tilde{b}^{-1/3}. \end{aligned}$$

On utilise ensuite de cette première estimation des estimations sur les dérivées successives de  $U$ , qui permettent à leur tour d'obtenir des estimations raffinées sur la fonction  $U$  elle-même. On ne donne ici que l'encadrement de  $\partial_{YY}U$ , et on renvoie à [1] pour le reste des estimations.

**Lemme 6.** *On suppose que les hypothèses de la Proposition 7 sont vérifiées. On suppose de surcroît qu'il existe des constantes  $C_1, C_2$  telles que*

$$\sup (1 - C_1 s_0^{-1} Y^2, -C_2) \leq \partial_{YY}U(s_0, Y) \leq 1 \quad \forall Y \geq 0.$$

*Alors il existe des constantes  $C'_1, C'_2, c$  telles que*

$$\begin{aligned} -C_2 \leq U_{YY} \leq 1 \quad \forall s \in [s_0, s_1], \quad \forall Y \geq 0, \\ U_{YY} - 1 \geq -C'_1 b Y^2 \quad \forall Y \in [0, cs^{1/3}]. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement l'encadrement raffiné suivant sur  $U$  et  $U_Y$ :

**Corollaire 1.** *On suppose que les hypothèses du Lemme 6 sont vérifiées. Alors il existe des constantes  $c, C > 0$  telles que pour tout  $s \in [s_0, s_1]$ , pour  $Y \leq cs^{1/3}$ ,*

$$\begin{aligned} 1 + Y - C\tilde{b}Y^3 \leq U_Y(s, Y) \leq 1 + Y, \\ Y + \frac{Y^2}{2} - CbY^4 \leq U(s, Y) \leq Y + \frac{Y^2}{2}. \end{aligned}$$

On montre également des estimations similaires sur  $\partial_Y^3 U, \partial_Y^4 U$ . On renvoie le lecteur à [1] pour les énoncés exacts de ces résultats.

## 5. Argument de bootstrap

L'argument de bootstrap réside en l'utilisation conjointe de la Proposition 6 d'une part, et de la Proposition 7 et du Lemme 6 d'autre part. Dans toute la suite, on appellera "donnée initiale bien préparée" une donnée initiale  $U(s_0)$  qui vérifie les hypothèses de la Proposition 7 et du Lemme 6, et telle que

$$E_2(s_0) \leq C_0 s_0^{-4-2\eta'}, \quad \left| b(s_0) - \frac{1}{s_0} \right| \leq \frac{\epsilon}{s_0}$$

pour une constante  $C$  indépendante de  $s_0$  et pour un certain  $\eta' > 0$  tel que  $\eta' < \eta$ , où  $\eta$  est le paramètre donné par la Proposition 6.

Le schéma du raisonnement est le suivant: si on part d'une donnée initiale bien préparée, alors il existe  $s_1 \geq s_0$  tel que si  $s \in [s_0, s_1]$ ,  $E_2(s) \leq 2C_0 s^{-4-2\eta'}$  et  $|b(s) - 1/s| \leq 2\epsilon/s$ . Alors, pour tout  $s \in [s_0, s_1]$ , d'après la Proposition 7 et le lemme 6, on en déduit que pour  $Y \leq cs^{1/3}$ ,

$$\begin{aligned} -C'_1 b Y^2 \leq U_{YY} - 1 \leq 0, \\ 1 + Y - C\tilde{b}Y^3 \leq U_Y(s, Y) \leq 1 + Y, \\ Y + \frac{Y^2}{2} - CbY^4 \leq U(s, Y) \leq Y + \frac{Y^2}{2}. \end{aligned}$$

Les hypothèses des Propositions 3, 4 et 6 sont alors vérifiées et on en déduit que

$$|b_s + b^2| \lesssim E_2(s)^{1/2} \leq C' s^{-2-\eta}.$$

Comme on a choisi  $\alpha > \eta$ , en prenant  $s_0$  suffisamment grand, on en déduit que  $C' s^{-2-\eta} \leq (3C_0/2)^{1/2} s^{-2-\eta'}$  pour tout  $s \geq s_0$ . De plus, on a le résultat suivant:

**Lemme 7.** *On suppose qu'il existe  $K > 0, \eta > 0$  et  $\delta > 0$  tels que pour tout  $s \in [s_0, s_1]$ ,*

$$\begin{aligned} |b_s + b^2| &\leq \frac{K}{s^{2+\eta}}, \\ \frac{1-\delta}{s} &\leq b(s) \leq \frac{1+\delta}{s}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Alors

$$\left| b(s) - \frac{1}{s} \right| \leq (1 + \delta) \left| \frac{1}{s_0} - b(s_0) \right| \frac{s_0^2}{s^2} + K(1 + \delta)(1 - \delta)^{-2}(1 - \eta)^{-1} \frac{1}{s^{1+\eta}}.$$

En particulier, si  $s_0$  est suffisamment grand, pour tout  $s \in [s_0, s_1]$ ,

$$\left| b(s) - \frac{1}{s} \right| \leq \frac{3\delta}{2s}.$$

On en déduit donc que

$$s_1 := \inf\{s \geq s_0, E_2(s) = 2C_0s^{-4-2\eta'} \text{ ou } |b(s) - 1/s| = 2\epsilon/s\} = +\infty.$$

Par conséquent,

$$b_s + b^2 = O(s^{-4-\eta}), \quad |b - 1/s| = O(s^{-1-\eta}).$$

On revient ensuite aux variables d'origine: on rappelle tout d'abord que  $b = -2\lambda_s/\lambda$ , d'où l'on déduit

$$\ln \frac{\lambda(s)}{\lambda_0} = -\frac{1}{2} \int_{s_0}^s b = -\frac{1}{2} \ln \frac{s}{s_0} + \phi(s),$$

où  $\phi(s) = -1/2 \int_{s_0}^s (b - 1/s)$ , de sorte que  $\phi$  est bornée et a une limite finie  $\bar{\phi}$  quand  $s \rightarrow +\infty$ . On en déduit que

$$\lambda(s) = \lambda_0 \left( \frac{s_0}{s} \right)^{1/2} \exp(\phi(s)).$$

Il s'ensuit que pour  $s \rightarrow \infty$ ,

$$x^* - x(s) \sim \frac{e^{4\bar{\phi}} s_0^2 \lambda_0^4}{s},$$

puis

$$\lambda(x) \sim \frac{\exp(-\bar{\phi})}{\lambda_0 \sqrt{s_0}} \sqrt{x^* - x}.$$

En choisissant  $s_0 = \lambda_0^{-2}$ , on obtient le résultat annoncé.

## References

- [1] A.-L. Dalibard and N. Masmoudi. A mathematical proof of boundary layer separation. In preparation, 2015.
- [2] W. E. Boundary layer theory and the zero-viscosity limit of the Navier-Stokes equation. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 16(2):207–218, 2000.
- [3] S. Goldstein. On laminar boundary-layer flow near a position of separation. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1:43–69, 1948.
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid mechanics*. Translated from the Russian by J. B. Sykes and W. H. Reid. Course of Theoretical Physics, Vol. 6. Pergamon Press; Addison-Wesley Publishing Co., 1959.
- [5] F. Merle and P. Raphael. On universality of blow-up profile for  $L^2$  critical nonlinear Schrödinger equation. *Invent. Math.*, 156(3):565–672, 2004.
- [6] F. Merle and P. Raphael. The blow-up dynamic and upper bound on the blow-up rate for critical nonlinear Schrödinger equation. *Ann. of Math. (2)*, 161(1):157–222, 2005.
- [7] O. A. Oleinik and V. N. Samokhin. *Mathematical models in boundary layer theory*, volume 15 of *Applied Mathematics and Mathematical Computation*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.
- [8] K. Stewartson. On Goldstein's theory of laminar separation. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 11, 1958.



SORBONNE UNIVERSITÉS  
UPMC UNIV. PARIS 06  
CNRS, UMR 7598  
LABORATOIRE JACQUES-LOUIS LIONS  
4, PLACE JUSSIEU  
75005 PARIS  
FRANCE  
dalibarda@ljl1.math.upmc.fr

COURANT INSTITUTE OF MATHEMATICAL SCIENCES  
251 MERCER STREET  
NEW YORK, NY 10012  
ÉTATS-UNIS