Journées *Équations aux dérivées partielles*
Saint-Jean-de-Monts, 31 mai–4 juin 1999
GDR 1151 (CNRS)

Limite quasineutre en dimension 1

Emmanuel Grenier

Résumé

L'objet de cette note est d'étudier la limite quasineutre des équations de Vlasov Poisson en dimension 1 d'espace. Ceci inclut l'obtention de résultats d'existence pour le système limite ainsi que la preuve de la convergence.

1. Introduction.

1.1 Limite quasineutre de Vlasov-Poisson

Une des caractéristiques principales des équations de la physique des plasmas est de comporter de très nombreux petits ou grands paramètres. Ainsi la permitivité électrique du vide est très faible, les champs magnétiques en présence généralement très forts, la masse des ions est grande devant la masse des électrons, la vitesse des particules négligeable devant la vitesse de la lumière ... Pour sérier les problèmes on s'intéresse ici à un cas simple de limite "quasineutre". Plus précisement on considère un nuage d'électrons, décrit par une fonction de distribution $f(t,x,v) \geq 0$, densité de probabilité de trouver un électron au temps t en $x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (tore périodique de dimension 1), avec la vitesse $v \in \mathbb{R}$. Ces électrons se déplacent sous l'effet du champ électrique $E(t,x)$ créé par eux mêmes et par des ions fixes de densité constante égale à 1. De façon classique, f vérifie l'équation de Vlasov

$$\partial_t f + v\partial_x f + E\partial_v f = 0 \tag{1}$$

où le champ E est donné par l'équation de Poisson

$$\varepsilon \partial_x E(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)dv - 1. \tag{2}$$

Dans (2), $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre qui vient de la permitivité électrique du vide après de nombreux changements d'échelles. Physiquement, ε est d'ordre 10^{-5} à 10^{-10}. Lorsque $\varepsilon \to 0$, $\int f dv$ qui est la densité d'électrons en (t,x) tend vers 1, c'est-à-dire que la densité des électrons tend vers la densité des ions et le plasma tend à devenir neutre, d'où le nom de limite quasineutre. Notons tout de suite que l'énergie du système est

$$\mathcal{E} = \int f(t,x,v)\frac{v^2}{2}dvdx + \varepsilon \int \frac{E^2}{2}dx, \tag{3}$$

somme de l'énergie cinétique des électrons et de l'énergie du champ électrique, et que $\mathcal{E}$ est indépendant de t. Notons aussi qu'en dérivant (2) par rapport au temps et en utilisant (1) on obtient

$$\varepsilon \partial_t E = - \int f v dv + \sigma(t) \tag{4}$$

où $\sigma(t)$ est une constante ne dépendant que du temps.

L'analyse formelle est facile. Quand $\varepsilon \to 0$ la première équation est invariante et la seconde s'écrit $\int f dv = 1$, ce qui donne

$$\partial_t f + v \partial_x f + E \partial_v f = 0 \tag{5}$$

$$\int f(t,x,v) dv = 1. \tag{6}$$

Quitte à faire un changement de repère, on peut imposer $\int f v dv = 0$. Le champ limite E peut être vu comme un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte (6), exactement comme la pression est un multiplicateur de Lagrange pour la contrainte de divergence nulle en mécanique des fluides incompressibles. On peut poursuivre l'analogie avec les équations d'Euler: les électrons se déplacent sous l'effet d'un gradient de telle sorte que leur densité reste partout égale à 1. Ainsi (5,6) est une version "cinétique" des équations d'Euler incompressibles [2].

1.2 Les difficultés

Pour bien comprendre les difficultés mathématiques du passage à la limite $\varepsilon \to 0$ dans (1,2) il convient tout d'abord de comprendre la physique sous jacente, qui est particulièrement riche.

Le premier phénomène important est l'existence d'oscillations du champ électrique à haute fréquence $\varepsilon^{-1/2}$ et de forte amplitude $O(\varepsilon^{-1/2})$, oscillations compatibles avec une énergie $\mathcal{E}$ finie. La source en est simple : si on considère un ion et un électron seuls et isolés, l'électron va se mettre à tourner autour de l'ion à grande vitesse. De même si on imagine une distribution uniforme d'électrons (densité 1) superposée à des ions fixes (de densité 1 également), et si on bouge brutalement une partie des électrons, ces derniers vont se mettre à osciller autour de leur position antérieure avec une fréquence $\varepsilon^{-1/2}$ tout en créant un champ électrique d'ordre $\varepsilon^{-1/2}$. La présence d'oscillations du champ de force de très haute amplitude est bien sûr un ennui majeur pour l'analyse mathématique, mais depuis les travaux de [7],[4],[3], la situation et les techniques à mettre en oeuvre sont bien comprises. Dans la suite nous éviterons donc ce problème en ne considérant que des données initiales "bien préparées" pour lesquelles il n'y a pas de telles oscillations.

Le second phénomène physique sous jacent est plus subtil à contrôler. Prenons d'abord $f_0(t,x,v)$ indépendante de t et x, valant 0 partout, sauf pour $-1 \leq v \leq -1/2$ et $1/2 \leq v \leq 1$ où f_0 vaut 1 (deux jets d'électrons de vitesses opposées). Alors f_0 est une solution stationnaire de (1,2) avec $E = 0$ et même de (5,6), mais c'est une solution instable, et si on la pertube un tant soit peu, même de façon très régulière, la solution correspondante change complètement : les deux jets se mettent à se torde et tendent à se rejoindre en formant des "rouleaux" en x et v, et ce en des temps de l'ordre $\varepsilon^{1/2}$. Ce phénomène porte le nom d'instabilité des deux jets.

Mathématiquement on peut le traduire ainsi

Théorème 1.1 *Pour tous entiers N et s arbitrairement grands, et pour tout $\varepsilon < 1$, il existe $v_i^\varepsilon(x) \in H^s(\mathbb{T})$ $(1 \leq i \leq 4)$ avec $\|v_1^\varepsilon(x)+1\|_{H^s} \leq \varepsilon^N$, $\|v_2^\varepsilon(x)+1/2\|_{H^s} \leq \varepsilon^N$, $\|v_3^\varepsilon(x)-1/2\|_{H^s} \leq \varepsilon^N$, $\|v_4^\varepsilon(x)-1\|_{H^s} \leq \varepsilon^N$, tels que la solution $f^\varepsilon(t,x,v)$ de (1,2) avec donnée initiale égale à 0 sauf pour $v \in [v_1^\varepsilon(x), v_2^\varepsilon(x)] \cap [v_3^\varepsilon(x), v_4^\varepsilon(x)]$ où elle vaut 1 ne converge pas vers $f_0(t,x,v)$ au sens suivant:*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \sup_{t\leq T} \int |f^\varepsilon(t,x,v) - f_0(t,x,v)| v^2 dv dx > 0 \tag{7}$$

et ce pour tout $T > 0$, et même en prenant $T = \varepsilon^\alpha$ avec $\alpha < 1/2$.

A noter que pour $T = 0$ la limite inférieure vaut bien 0 et que imposer que $\int |f^\varepsilon - f_0| v^2 dv dx$ tende vers 0 est une exigeance très faible (voir [6],[5] pour des cas plus généraux).

Autrement dit si on perturbe un tout petit peu f_0, la solution correspondante de (1,2) ne converge pas vers (5,6) et la limite formelle est *fausse.* Comme un fait exprès si on écrit (5,6) sur les lignes de niveau v_i on obtient un système elliptique et donc mal posé comme problème d'évolution. Pour certaines données initiales (même régulières), il n'y a donc pas convergence en un quelconque sens *fort* de solutions de (1,2) vers une solution de (5,6).

A noter que le changement de variables $x \to x/\sqrt{\varepsilon}$ et $t \to t/\sqrt{\varepsilon}$ nous ramène à (1,2) avec $\varepsilon = 1$. En jouant avec ce changement d'échelle on peut conjecturer que si il existe x tel que $\tilde{f}(v) = f(0,x,v)$ soit une solution instable de (1,2), alors quand $\varepsilon \to 0$, une instabilité de type "deux jets" apparait autour de x et empêche toute convergence forte vers une limite régulière et aussi toute existence de solution pour (5,6). A contrario, si pour tout x, $v \to f(0,x,v)$ est un profil stable pour Vlasov Poisson alors il existe une solution régulière à (5,6) avec donnée initiale $f(0,x,v)$ en temps petit, et on a convergence de (1,2) vers (5,6) quand $\varepsilon \to 0$.

A noter que d'après le critère de Penrose, les fonctions "à un seul changement de monotonie", c'est-à-dire croissantes puis décroissantes en v sont linéairement stables [6]. La suite de cette note est destinée à la preuve de la conjecture dans ce cas.

2. Un théorème d'existence .

Théorème 2.1 *Soit $f_0(x,v) \in C^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R})$ une fonction de distribution positive, telle que $\{(x,v) | f_0(x,v) = \|f_0(x,.)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\}$ soit le graphe d'une fonction $\bar{v}_0(x) \in C^\infty(\mathbb{T})$ et telle que pour tout $x \in \mathbb{T}$, $v \to f_0(x,v)$ soit strictement croissante pour $v < \bar{v}_0(x)$ et strictement décroissante pour $v > \bar{v}_0(x)$. On suppose de plus que pour tout x, $f_0(x,v)$ décroit au moins exponentiellement en $\pm\infty$ et que pour tout x, $\int f_0 dv = 1$, $\int f_0 v dv = 0$. Alors il existe $T > 0$ et $f(t,x,v) \in C^\infty([0,T] \times \mathbb{T} \times \mathbb{R})$ solution de (5,6) avec donnée initiale f_0.*

De plus soit f^ε la solution de (1,2) avec donnée initiale f_0. Alors sur $[0,T]$, f^ε converge fortement dans $L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R})$ vers f quand $\varepsilon \to 0$.

Bien sûr la régularité C^∞ peut être relaxée en régularité H^s avec s assez grand. Les hypothèses de monotonie sont naturelles au vu du paragraphe précédent. La suite de la note est destinée à la preuve de la partie "existence" de ce théorème.

2.1 Equation sur $\bar{v}$

Supposons construite une solution régulière $f(t,x,v)$. On cherche l'équation régissant le maximum. On écrit formellement

$$\partial_v f(t,x,\bar{v}(t,x)) = 0$$

soit

$$\partial_{xv} f + \partial_x \bar{v} \partial_{vv} f = 0$$

et

$$\partial_{tv} f + \partial_t \bar{v} \partial_{vv} f = 0$$

et en utilisant l'équation (5) on obtient

$$\partial_t \bar{v} + \bar{v} \partial_x \bar{v} = E + \frac{\partial_x f}{\partial_{vv} f}.$$

2.2 Stabilité d'équilibres

Remarquons d'abord que l'énergie cinétique $\int f(t,x,v) v^2 dv dx$, la vitesse moyenne $\int f(t,x,v) v dv dx$, la charge $\int f(t,x,v) dv dx$ ainsi que $\int Q(f(t,x,v)) dx dv$ (transport de $f(t,x,v)$) pour toute fonction Q sont indépendantes du temps si f est une solution de (5,6). Ainsi pour tous réels α, β et pour toute fonction Q,

$$H_C(f) = \int f \frac{v^2}{2} dv dx + \alpha \int f v dv dx + \beta \int f dv dx + \int Q(f) dv dx \qquad (1)$$

est indépendant du temps si f est solution du problème limite.

Soit maintenant $f(v)$ solution stationnaire, indépendante de x dont on veut étudier la stabilité. En suivant la méthode générale des fonctions de Lyapounov [1] on est conduit à chercher α, β et Q tels que f soit un point critique de H_C. L'annulation de DH_C fournit

$$\frac{v^2}{2} + \alpha v + \beta + Q'(f) = 0 \qquad (2)$$

c'est-à-dire, en dérivant en v,

$$Q''(f) = -\frac{\alpha + v}{\partial_v f}. \qquad (3)$$

L'étape suivante est de savoir si la Hessienne $D^2 H_C$ de H_C a un signe défini ou non. La réponse est positive si il existe β tel que $\partial_v f$ soit du signe de $-\alpha - v$. Ceci impose que f n'ait qu'un seul changement de monotonie, c'est-à-dire que f soit strictement croissante de $-\infty$ à un certain v_0 puis strictement décroissante.

Sous cette hypothèse, et si on suppose de plus que le maximum de f en v_0 est non dégéneré ($\partial_{vv} f(\bar{v}) < 0$) alors $Q''(f) > 0$ si on prend $\alpha = -v_0$.

On remarque ensuite que si f est un point critique de H_C alors la Hessienne $D^2 H_C(g)$ de H_C est préservée par la dynamique linéarisée. Plus précisement, si g est solution de

$$\partial_t g + v\partial_x g + \tilde{E}\partial_v f = 0, \tag{4}$$

$$\int g dv = \int g v dv = 0 \tag{5}$$

alors

$$D^2 H_C(g) = \int Q''(f) g^2 dv dx \tag{6}$$

est indépendante du temps, ce qui se vérifie par un calcul direct. On a ainsi obtenu une norme non triviale qui contrôle le système linéaire (4,5). Cette norme qui utilise profondément toutes les quantités conservées de (5,6) permet en particulier de prouver très simplement la stabilité linéaire du système limite.

2.3 Estimations d'énergie

Soit maintenant $f(t, x, v)$ une solution du système limite, toujours sous l'hypothèse de monotonie. L'objet de ce paragraphe est de construire une norme qui contrôle le linéarisé de (5,6), inspirée du paragraphe précédent. On introduit

$$N(g) = \int \Big(\frac{\bar{v}(t,x) - v}{\partial_v f}\Big) g^2 dv dx. \tag{7}$$

Lemme 2.2 *Soit $f(t, x, v)$ solution de (5,6), telle que*

$$\|\partial_x \bar{v}\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{T})} + \sup_{x,v} \Big| \frac{\partial_x f}{\partial_v f} + \frac{\partial_x f(\bar{v})}{\partial_{vv} f(\bar{v})(\bar{v} - v)} \Big| < +\infty, \tag{8}$$

pour un certain $T > 0$. Alors il existe C tel que toute solution $g(t, x, v)$ du système linéarisé

$$\partial_t g + v\partial_x g + E\partial_v g + \tilde{E}\partial_v f = 0, \tag{9}$$

$$\int g dv = \int g v dv = 0, \tag{10}$$

vérifie pour $0 \le t \le T$

$$\partial_t N(g) \le C N(g). \tag{11}$$

Preuve

A noter que $\tilde{E} = -\partial_x \int g v^2 dv$. On a

$$\partial_t N(g) = \int g^2 (\partial_t + v\partial_x + E\partial_v) \frac{\bar{v} - v}{\partial_v f},$$

puisque le poids tue précisement le terme ennuyeux $\tilde{E}\partial_v g$ sur lequel on n'a aucun contrôle, et

$$(\partial_t + v\partial_x + E\partial_v)\frac{\bar{v} - v}{\partial_v f} = \frac{\bar{v} - v}{\partial_v f}\Big(-\partial_x \bar{v} + \frac{\partial_x f}{\partial_v f} + \frac{\partial_x f(\bar{v})}{\partial_{vv} f(\bar{v})(\bar{v} - v)}\Big) \tag{12}$$

donc si $| - \partial_x \bar{v} + \partial_x f/\partial_v f + \partial_x f(\bar{v})/\partial_{vv} f(\bar{v})(\bar{v} - v)|$ est borné par une constante C' on a bien (11). □

Ces estimations sont en fait uniformes en la limite $\varepsilon \to 0$.

Lemme 2.3 *Sous les hypothèses du Lemme 2.2, il existe C tel que toute solution $g(t, x, v)$ du système linéarisé*

$$\partial_t g + v\partial_x g + E\partial_v g + \tilde{E}\partial_v f = 0, \tag{13}$$

$$\varepsilon \partial_x \tilde{E} = \int g dv \tag{14}$$

où $0 < \varepsilon < 1$ vérifie pour $0 \leq t \leq T$

$$\partial_t\Big(N(g) + \varepsilon \int \frac{\tilde{E}^2}{2}\Big) \leq C\Big(N(g) + \varepsilon \int \frac{\tilde{E}^2}{2}\Big). \tag{15}$$

Preuve

On a

$$\partial_t\Big(N(g) + \varepsilon \int \frac{\tilde{E}^2}{2}\Big) = \int g^2(\partial_t + v\partial_x + E\partial_v)\frac{\bar{v} - v}{\partial_v f} - 2\int (\bar{v} - v) g\tilde{E} + \varepsilon\partial_t \int \tilde{E}^2.$$

D'autre part, en dérivant (14) on obtient

$$\varepsilon \partial_t \tilde{E} = -\int g v dv + \sigma(t)$$

où $\sigma(t)$ est une constante dépendante du temps. Ceci permet de majorer

$$\Big|\int (\bar{v} - v) g\tilde{E} - \varepsilon\partial_t \int \frac{\tilde{E}^2}{2}\Big| = \varepsilon\Big|\int \bar{v}\tilde{E}\partial_x \tilde{E}\Big| \leq \varepsilon \|\partial_x \bar{v}\|_{L^\infty} \int \frac{\tilde{E}^2}{2}.$$

Les autres termes se majorent comme précédemment. □

2.4 Dérivées d'ordres supérieurs

L'étape suivante est d'obtenir des estimations a priori sur les dérivées d'ordres élevés d'une solution f de (5,6). Tout d'abord sous les hypothèses du Lemme 2.2,

$$\partial_t N(f) \leq C N(f).$$

D'autre part,

$$\partial_t(\partial_x f) + v\partial_x(\partial_x f) + E\partial_v(\partial_x f) + \partial_x E \partial_v f = 0$$

donc

$$\partial_t N(\partial_x f) \leq CN(\partial_x f) - 2\int (\bar{v}-v)\partial_x E \partial_x f \leq CN(\partial_x f)$$

car $\int (\bar{v}-v)\partial_x f dv = 0$. De plus

$$\partial_t(\partial_v f) + v\partial_x(\partial_v f) + E\partial_v(\partial_v f) + \partial_x f = 0$$

donc

$$\partial_t N(\partial_v f) \leq CN(\partial_v f) + CN(\partial_x f)$$

ce qui permet de borner $N(\partial_v f) + N(\partial_x f)$. Il est intéressant de noter que quitte à ajouter $\varepsilon \int (\partial_x E)^2$ à $N(\partial_x f)$, ces estimations sont aussi valables pour des solutions de (1,2), avec des constantes uniformes en ε.

Au second ordre on a

$$\partial_t(\partial_{xx} f) + v\partial_x(\partial_{xx} f) + E\partial_v(\partial_{xx} f) + \partial_{xx}E\partial_v f + 2\partial_x E \partial_{vx} f = 0$$

qui compte tenu des hypothèses du Lemme 2.2 donne

$$\partial_t N(\partial_{xx} f) \leq CN(\partial_{xx} f) + CN(\partial_{xv} f).$$

moyennant un contrôle de $\|\partial_x E\|_{L^\infty}$. De plus $\partial_{xv} f$ et $\partial_{vv} f$ ne posent pas de problèmes. A nouveau ces estimations sont uniformes en ε pour des solutions de (1,2), moyennant l'ajout de termes ad hoc contenant le champ électrique E.

A l'ordre trois les estimations se déroulent de façon similaire si on suppose de plus $\|\partial_{xx} E\|_{L^\infty}$ borné sur $[0, T]$. A l'ordre quatre on utilise les injections de Sobolev pour contrôler certaines dérivées de f (en remarquant que le poids $(\bar{v}-v)/\partial_v f$ est borné uniformément loin de 0) ainsi que des estimations L^2 sur les dérivées du champ électrique du type

$$\|\partial_{xxx} E\|_{L^2}^2 = \int \Big(\int v^2 \partial_x^4 f dv)^2 dx \leq N(\partial_x^4 f) \sup_{0\leq t\leq T, x} \int v^4 \frac{\partial_v f(t,x,v)}{\bar{v}(t,x)-v} dv$$

que l'on peut majorer par $CN(\partial_x^4 f)$ si

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|\partial_{xx} E\|_{L^\infty} + \sup_{0\leq t\leq T, x} \int v^4 \frac{\partial_v f(t,x,v)}{\bar{v}(t,x)-v} dv + \sup_{0\leq t\leq T, x} \left| \frac{\partial_v f}{\bar{v}-v} \right| \leq C. \qquad (16)$$

Les dérivées d'ordres supérieurs ne posent pas de nouvelles difficultés. Pour boucler les estimations il reste à vérifier que le contrôle de suffisamment de normes du type $N(\partial_x^\alpha \partial_v^\beta f)$ conduit à (8) et (16), au moins pour T assez petit. Pour cela on utilise la méthode des caractéristiques pour estimer $\partial_x \bar{v}$ puis $\partial_x f / \partial_v f$ et on boucle les estimations grâce à (12).

Références

[1] V.I. Arnold: Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, *Annales de l'Institut Fourier*, 16 (1996) 319 – 361.

[2] Y. Brenier: A Vlasov-Poisson type formulation of the Euler equations, *rapport INRIA* 1070 (1989).

[3] I. Gallagher: Asymptotic of the solutions of hyperbolic equations with a skew-symmetric perturbation, *J. Differential Equations*, 150 (1998), 363 – 384.

[4] E. Grenier: Oscillatory perturbations of the Navier-Stokes equations, *J. Math. Pures Appl.*, 76 (1997), 477 – 498.

[5] E. Grenier, Y. Guo: On the twostream instability, *en préparation.*

[6] Y. Guo, W. Strauss: Nonlinear instability of double-humped equilibria, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 12 (1995), 33 – 352.

[7] S. Schochet: Fast singular limits of hyperbolic PDEs, *J. Differential Equations*, 114 (1994), 476 – 512.

U.M.P.A., CNRS UMR 5669,École Normale Supérieure de Lyon, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon 7
egrenier@umpa.ens-lyon.fr