ONDES HYPERBOLIQUES NON LINEAIRES GLOBALES.

P.GODIN

0. INTRODUCTION

Dans cet exposé, on va décrire des résultats d'existence globale d'ondes régulières par morceaux, solutions d'équations hyperboliques non linéaires du second ordre. On va s'intéresser ici à deux types d'ondes :

a) ondes de choc solutions d'une loi de conservation quasi-linéaire,

b) ondes progressives continues, dont le gradient présente des discontinuités, solutions d'une équation semi-linéaire.

La théorie d'existence locale des ondes a) et b), pour des systèmes généraux, a fait l'objet de nombreux travaux (cf [8,6,5] et la bibliographie de ces articles). Cet exposé est divisé en 3 parties: dans la première partie, on rappelle les résultats globaux de Klainerman [3,4] concernant les ondes lisses (sans singularités); dans la deuxième partie, on décrit certains résultats correspondants pour des chocs (cf [1]). Finalement, dans la troisième partie, on donne des résultats sur les ondes progressives semi-linéaires ([2]).

Dans la suite, on désignera par $x=(x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{R}^N$ la variable d'espace, par x_0 ou t la variable de temps, et par ∂_i la dérivation $\partial/\partial x_i$, $0 \leq i \leq N$.

1. Le cas sans singularités (cf [3,4]).

On considère la problème de Cauchy

(1) $\Box u=\Sigma f^{ij}(u')\partial^2_{ij}u+\Sigma f^i(u')\partial_i u$ si $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$,

(2) $\partial_t^j u=\varepsilon u_j$, $j=0,1$, si $t = 0$, $x \in \mathbb{R}^N$,

où $\Box=\partial_t^2-\sum_1^N\partial_j^2$ et $f^{ij}=f^{ji}$; $f^{ij},f^j \in C^\infty$ dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^{N+1}$, $f^{ij}(0)=f^i(0)=0$, $u'=(\partial_0 u,\partial_x u)$, $u_0,u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, et $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre. Si ε est assez petit, il est bien connu que le problème (1),(2) possède une solution C^∞ pour t assez petit. Posons $T_\varepsilon=\sup\{t > 0$, (1),(2) possède une solution $C^\infty([0,t[\times \mathbb{R}^N)\}$.On a alors

THEOREME 1. ([3]). Pour ε assez petit, on a les résultats suivants, où C et A sont des constantes > 0 :

1) Si $N \geq 4$, $T_\varepsilon = +\infty$

2) Si $N=3$, $T_\varepsilon \geq Ce^{A/\varepsilon}$

3) Si $N=2$, $T_\varepsilon \geq C/\varepsilon^2$

4) Si $N=1$, $T_\varepsilon \geq C/\varepsilon$.

La preuve du théorème 1 est basée sur un principe de prolongement des solutions La méthode classique de l'énergie montre que si u est une solution de (1),(2) pour $0 \leq t < T$, satisfaisant $|u'| \leq M$ (assez petit), alors

$$(3) \quad \sup_{0\leq s\leq t} \|u'(s)\|_k \leq C\|u'(0)\|_k \exp\left(C_M\int_0^t |u''(s)|\,ds\right),$$

où $\| \ \|_k$ est la norme de l'espace de Sobolev $W^{k,2}(\mathbb{R}^N)$. Si donc $|u'|$ reste assez petit et $\int_0^t |u''(s)|\,ds$ reste borné quand $t \uparrow T$, il en est de même du premier membre de (3), et on peut prolonger la solution pour des valeurs de t supérieures à T. L'idée de Klainerman [3,4] est d'introduire des espaces adaptés où une inégalité telle que (3) est vraie, avec un second membre borné quand T ne dépasse pas les bornes inférieures données par le théorème 1. Dans [3,4], Klainerman introduit les champs de vecteurs $L_{ij}=x_i\partial_j-x_j\partial_i$, $0 < i,j \leq N$, $L_{0j}=t\partial_j+x_j\partial_t$, $1 \leq j \leq N$, $S=t\partial_t+\sum_1^N x_j\partial_j$.

Soit $\mathbb{K}$ l'espace vectoriel réel engendré par ∂_j, $0 \leq j \leq N$, L_{ij}, $0 \leq i < j \leq N$, S. $\mathbb{K}$ est une algèbre de Lie. Pour des fonctions $w(t,x)$, on définit les normes pondérées $\|w(t)\|_{\mathbb{K},k}=\sum_{|\alpha|\leq k} \|\Gamma^\alpha w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N_x)}$, $|w(t)|_{\mathbb{K},k} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\Gamma^\alpha w(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_x)}$, où $\Gamma^\alpha=\Gamma_1^{\alpha_1}\cdots\Gamma_\ell^{\alpha_\ell}$, $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_\ell$ étant les générateurs de $\mathbb{K}$.

On peut démontrer une estimation correspondant à (3) (cf [3]):

$$(3') \quad \|u'(t)\|_{\mathbb{K},k} \leq C\|u'(0)\|_{\mathbb{K},k} \exp\left(C_M\int_0^t |u'(s)|_{\mathbb{K},[(k+1)/2]}\,ds\right),$$

si $k \geq 1$ et $\sup_{0\leq s\leq t} |u'(s)|_{\mathbb{K},[\frac{k}{2}]} \leq M$. Le point-clé est alors l'estimation de Sobolev à poids, due à Klainerman [4,3]:

(4) si $k_0 > \frac{N}{2}$ et si $w(t,x)$ est à support compact en x pour tout t, alors

$$|w(t,x)| \leq C(1+|t-|x||)^{-1/2}(1+t+|x|)^{-(N-1)/2}\|w(t)\|_{\mathbb{K},k_0}.$$

La preuve du théorème 1 s'obtient en combinant (3') et (4).

2. Ondes de choc ([5,1])

On considère une loi de conservation hyperbolique

(5) $\Sigma\, \partial_i(H^i(\varphi'))=0$,

où $H^i \in C^\infty$. On s'intéresse à des chocs, c'est-à-dire à des solutions faibles de (5) continues, définies sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$, et qui ont la structure suivante: il existe une hypersurface S transverse aux plans t=constante, divisant $\Omega \setminus S$ en deux parties Ω^-,Ω^+, telle que

(i) $\varphi^\pm=\varphi|_{\Omega^\pm} \in C^\infty(\bar{\Omega}^\pm)$.

(ii) S est non caractéristique pour les opérateurs linéarisés $\frac{1}{2}\,\Sigma(\partial_j H^i+\partial_i H^j)((\varphi^\pm)')\partial^2_{ij}$.

On va en fait se limiter à étudier certaines petites perturbations d'un choc plan. On se donne donc deux fonctions $\bar{\varphi}^\pm(t,x)=\sum_0^N a_j^\pm x_j$, $a_j^\pm \in \mathbb{R}$, et on pose $\Omega^\pm=\{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N,\ \bar{\varphi}^+(t,x) < \bar{\varphi}^-(t,x)\}$. Pour que $(\bar{\varphi}^-,\bar{\varphi}^+)$ définisse une solution faible, la condition de Rankine-Hugoniot

(6) $\Sigma(H^i(a^+)-H^i(a^-))(a_i^+-a_i^-)=0$

doit être satisfaite. On suppose que $a_N^+\neq a_N^-$ afin que $\bar{S}=\{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N,\ \bar{\varphi}^-(t,x)=\bar{\varphi}^+(t,x)\}$ soit transverse aux plans t=constante. Ce n'est pas une restriction de supposer que $a_N^+ < a_N^-$. On pose $h_\pm^{ij}=\frac{1}{2}(\partial_i H^j+\partial_j H^i)(a^\pm)$ et on fait alors les hypothèses (H1),(H2),(H3) que l'on va décrire maintenant (cf [5]).

(H1) Hyperbolicité: $\Sigma h_{\pm}^{ij}\partial_{ij}^2$ est hyperbolique normal de signature (1,N) et $h_{\pm}^{00} > 0$;

(H2) Stabilité unidimensionnelle: $\bar{S}$ est une surface d'espace pour $\Sigma h_{-}^{ij}\partial_{ij}^2$ et une surface de temps pour $\Sigma h_{+}^{ij}\partial_{ij}^2$.

On va perturber les données initiales de $\bar{\varphi}^{\pm}$ et essayer de construire un choc (φ^-,φ^+) dont les conditions initiales si t=0 sont $\partial_t^j \bar{\varphi}^-$, $0 \leq j \leq 1$ dans Ω^- et $\partial_t^j \bar{\varphi}^+ + \omega_j$ dans Ω^+, où les $\omega_j \in C_{(0)}^{\infty}(\bar{\Omega}^+ \cap \{t=0\})$ sont "petites". On va rechercher une surface de choc proche de $\bar{S}$ qui soit d'espace par rapport à $\Sigma h_{-}^{ij}\partial_{ij}^2$. Cela conduit à prendre $\varphi^- = \bar{\varphi}^-$. Si on pose $\varphi = \bar{\varphi}^- - \varphi^+$, on se ramène à trouver une surface de choc S, donnée par une équation $\psi=0$, divisant $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ en deux parties U^-,U^+ correspondant à φ^-,φ^+, et à déterminer φ dans U^+. Oe est donc ramené au problème mixte suivant :

(7) $\Sigma\partial_i H^i(a^- - \varphi')=0$ dans U^+,

(8) $\Sigma(H^i((\bar{\varphi}^-)' - \varphi') - H^i((\bar{\varphi}^-)'))\partial_i\psi=0$ sur S,

(9) $\partial_t^j\varphi = \partial_t^j(\bar{\varphi}^- - \bar{\varphi}^+) - \omega_j$ dans $U^+ \cap \{t=0\}$.

Pour de petites perturbations du choc plan, $\partial_N\varphi$ sera $\neq 0$, et comme $\varphi=0$ sur S, il en résulte que (8) peut être remplacée par

(8') $\Sigma(H^i((\bar{\varphi}^-)' - \varphi') - H^i((\bar{\varphi}^-)'))\partial_i\varphi=0$ sur $S=\{\varphi=0\}$.

Pour résoudre le problème (7),(8'),(9) on redresse S par une transformation de l'hodographe partielle (cf [5]): si $(t,y) \mapsto (t,y',v(t,y))$ est l'inverse de l'application $(t,x) \mapsto (t,x',\varphi(t,x))$ (qui sera inversible), le problème (7),(8'), (9) se transforme en un problème mixte hyperbolique pour v dans $t > 0$, $y_N > 0$. On impose alors la condition

(H3) Stabilité multidimensionnelle: quand $\omega_o \equiv \omega_1 \equiv 0$, le problème mixte pour v correspondant à (7),(8'),(9) satisfait la condition de Lopatinski uniforme par rapport à $y_N > 0$ quand $y_N=0$.

Sous les hypothèses (H1),(H2),(H3), et sous des conditions de compatibilité naturelles des données sur l'arête $t=y_N=0$, il découle des résultats de [5] que le problème (7),(8'),(9) possède une solution C^∞ pour t petit. Pour obtenir une solution globale, on se ramène facilement, après un changement de variables, à l'étude des solutions globales du problème mixte

(10) $\Box u=\Sigma f^{ij}(u')\partial^2_{ij}u$ si $t > 0$, $x_N > 0$,

(11) $Bu=\Sigma g^j(u')\partial_j u$ si $t > 0$, $x_N = 0$,

(12) $\partial_t^j u=U_j$, $j=0,1$ si $t = 0$, $x_N > 0$,

où $f^{ij}=f^{ji}$; f^{ij}, $g^j \in C^\infty$ dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^{N+1}$, $f^{ij}(0)=g^j(0)=0$.

Les $U_j \in C^\infty_{(0)}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ sont petites et satisfont les conditions de compatibilité naturelles sur l'arête $t=x_N=0$. $B=\sum_0^N b^j\partial_j$ est un champ de vecteurs à coefficients constants tel que $\{\Box,B\}$ satisfasse la condition de Lopatinski uniforme par rapport à $x_N > 0$ si $x_N=0$.

Pour le problème (10),(11),(12), on peut prouver une estimation d'énergie correspondant à (3). A cause de la présence du bord $x_N=0$, les espaces $\| \;\|_{\mathbb{K},k}$ de la section 1 ne semblent pas commodes à utiliser. Soit $\mathbb{A}$ l'espace vectoriel réel engendré par ∂_j, $0 \leq j \leq N-1$, L_{ij}, $0 \leq i < j \leq N-1$ (cf.section 1). $\mathbb{A}$ est une algèbre de Lie. Si λ est un grand paramètre > 0 et $s \geq 0$, posons $\chi(s)= \min((1+s^2)^{1/2}, \lambda(\lambda^2-1)^{-1/2})$, et $\psi_m(x')=m\chi(|x'|/m)$ si $m > 0$ et $x'=(x_1,\ldots,x_{N-1})$. Si $\omega > 0$ et $\tilde{D}_m=\{(t,x') \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}, \psi_{m-\omega}(x') < t < \psi_m(x')\}$, une analyse des arguments de [4] montre qu'on peut prouver des inégalités qui remplacent (4), pour l'algèbre $\mathbb{A}$, dans les domaines $\tilde{D}_m$. Posons alors $E(\varepsilon)=\sup\{t > 0$, le problème (10),(11),(12) possède une solution $u \in C^\infty([0,t[\times \mathbb{R}^N_+)$ pour toutes données initiales infiniment compatibles telles que $\sum_{|\alpha|\leq 2[\frac{N+4}{2}]} \|\Lambda^\alpha u'(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} \leq \varepsilon, \Lambda_j \in \mathbb{A}\}$.

Posons $T_\varepsilon = \sup E(\varepsilon)$. En intégrant par rapport à x_N les estimations associées à Λ qui remplacent (4) et en utilisant l'estimation d'énergie, on obtient alors

<u>THEOREME 2</u>. [1]. Pour ε petit, on a (avec des constantes $A,C > 0$)

1) $T_\varepsilon = +\infty$ si $N \geq 5$

2) $T_\varepsilon \geq Ce^{A/\varepsilon}$ si $N=4$, $T_\varepsilon \geq C/\varepsilon^2$ si $N=3$.

A partir du théorème 2, on obtient facilement des chocs globaux solutions de (7),(8),(9) si $N \geq 5$.

3. <u>Ondes progressives semi-linéaires</u> [8,6,7,2]

On s'intéresse ici à des solutions faibles u du problème de Cauchy

(13) $\square u = \Sigma f^i(u')\partial_i u$ si $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$,

(14) $\partial_t^j u|_{t=0} = \varepsilon u_j$ si $t=0$, $x \in \mathbb{R}^N$,

où $f^i \in C^\infty$ dans un voisinage de 0, $f^i(0)=0$ et $\varepsilon > 0$ est une petit paramètre. On suppose qu'il existe un ouvert borné $V \subset \mathbb{R}^N$, à bord $\partial V \in C^\infty$, situé localement d'un seul côté de ∂V, tel que

($\bar{H}1$) $u_0 = u_1 = 0$ hors de $\bar{V}$, $u_0|_{\partial V} = 0$; $u_0|_V$, $u_1|_V \in C^\infty(\bar{V})$.

Il résulte alors de [8,6] que si ε est assez petit, (13),(14) a une solution u pour t petit. u est continue, u' est bornée et C^∞ par morceaux avec des sauts seulement sur les deux surfaces caractéristiques de $\square$, issues de ∂V. Désignons par Σ la surface caractéristique sortante issue de ∂V (c'est-à-dire la surface $\varphi=0$ solution de $\partial_t\varphi + |\partial_x\varphi| = 0$ telle que $\varphi|_{t=0} = \psi$ si $\partial V = \psi^{-1}(0)$ et $\psi < 0$ dans V, $\psi > 0$ hors de $\bar{V}$). On fait l'hypothèse

($\bar{H}2$) V est convexe.

On voit qu'alors Σ est globale dans le futur. On suppose que

$(\bar{H}3)$ $(\partial_t - \Sigma \frac{\partial_j \varphi}{\partial_t \varphi} \partial_j)^k u(0,x) \to 0$ si $x \in V$ tend vers ∂V et $k \in \mathbb{N}$

dont il résulte que les solutions de (13),(14) sont singulières seulement sur Σ. On suppose encore que

$(\bar{H}4)$ La courbure totale de V dans la direction normale est $\neq 0$ en tout point.

Soient $\Sigma_t = \{(s,x) \in \Sigma, s=t\}$ et V_t la composante connexe bornée de $(\{t\} \times \mathbb{R}^N) \setminus \Sigma_t$. Finalement soit $D_t = \bigcup_{0<s<t} V_s$. Désignons par T_ε le supremum des $t > 0$ tels que le problème (13,(14) possède une solution $C([0,t[\times \mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\bar{D}_t)$. On a alors le résultat suivant (sous les hypothèses $(\bar{H}1)$,$(\bar{H}2)$,$(\bar{H}3)$,$(\bar{H}4)$:

THEOREME 3 ([2]). Pour $\varepsilon > 0$ petit, on a (avec des constantes $A,C > 0$):

1) $T_\varepsilon = +\infty$ si $N \geq 4$,

2) $T_\varepsilon \geq C\, e^{A/\varepsilon}$ si $N=3$.

La preuve du théorème 3 se fait dans l'esprit de celle du théorème 1. Elle est basée sur une estimation d'énergie. Pour contrôler les termes sur Σ, on utilise l'hypothèse $(\bar{H}4)$. On peut aussi montrer le résultat suivant (sous les hypothèses $(\bar{H}1)$,$(\bar{H}2)$,$(\bar{H}3)$), qui généralise des exemples de [7]. Posons $f(p) = \Sigma f^i(p) p_i$.

THEOREME 4 ([2]). Supposons qu'en un point $a \in \partial V$, il y a au plus deux courbures principales non nulles dans la direction normale à ∂V. Si $|f(p)| \geq C|p|^2$, $(C > 0)$, on peut trouver u_0, u_1 telles que (13),(14) ne possède pas de solution globale quel que soit $\varepsilon > 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.GODIN, Long time existence of a class of perturbations of planar shock fronts for second order hyperbolic conservation laws, preprint.

[2] P.GODIN, Long time existence of a class of progressive waves for semilinear hyperbolic equations of second order, en préparation.

[3] S.KLAINERMAN, Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equations, Comm.Pure Appl.Math. 38 (1985), 321-332.

[4] S.KLAINERMAN, Remarks on the global Sobolev inequalities in the Minkowski space $\mathbb{R}^{n+1}$, Comm.Pure Appl.Math. 40 (1987), 111-117.

[5] A.MAJDA, E.THOMANN, Multi-dimensional shock fronts for second order wave equations, Comm.Part.Diff.Eq. 12 (7), (1987), 777-828.

[6] G.METIVIER, Problèmes de Cauchy et ondes non linéaires, Actes de Saint-Jean-de-Monts 1986, exposé n°1.

[7] J.RAUCH, Explosion for some semilinear wave equations, J.Diff.Eq. 74 (1988), 29-33.

[8] J.RAUCH, M.REED, Discontinuous progressing waves for semilinear systems, Comm.Part.Diff.Eq. 10(9) (1985), 1033-1075.

Université Libre de Bruxelles, Département de Mathématique,
Campus Plaine C.P.214, Boulevard du Triomphe,
1050 Bruxelles, Belgique