

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ANNE-MARIE CHARBONNEL

## **Spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1982), p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1982\\_\\_\\_\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A2_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SPECTRE CONJOINT D'OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS QUI COMMUTENT

par A. M. CHARBONNEL

INTRODUCTION.

On considère sur  $\mathbb{R}^n$  ( $v \leq n$ ) opérateurs pseudodifférentiels  $P_1, \dots, P_v$ , symétriques, commutant deux à deux, vérifiant les hypothèses suivantes :

(H<sub>0</sub>) le symbole de Weyl  $\tilde{p}_j$  de  $P_j$  appartient à  $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  et admet un développement asymptotique :

$$(1) \quad \tilde{p}_j(x, \xi) \sim \sum_{i \geq 0} p_{2-i}^j(x, \xi)$$

dont les composantes  $p_{2-i}^j$  sont homogènes de degré  $2-i$  en  $(x, \xi)$  en dehors d'un voisinage de l'origine.

En particulier  $\tilde{p}_j$  appartient à la classe  $S_\mu^p$  si  $S_\mu^p$  est définie par :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_\mu^p = \{s \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) ; |\partial_\xi^\alpha D_x^\beta s| \leq C_{\alpha\beta} \mu^{p-|\alpha|-|\beta|}\} \\ \text{avec } \mu(x, \xi) = 1 + |x| + |\xi| \end{array} \right.$$

On notera  $p_j$  au lieu de  $p_2^j$  le symbole principal de  $P_j$ , et  $p = (p_1, \dots, p_v)$  le symbole principal joint.

$$(H_1) \quad |p| > 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} ;$$

(H<sub>1</sub>) signifie que l'opérateur  $P_1^2 + \dots + P_v^2$  est globalement elliptique (d'ordre 4).

Sous les hypothèses (H<sub>0</sub>) et (H<sub>1</sub>), cet opérateur admet dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  une unique réalisation autoadjointe, soit  $P$ , et  $I + P$  est d'inverse compact.

$P$  possède donc un spectre purement discret, composé d'une suite de valeurs propres tendant vers  $+\infty$ , et il existe une base orthonormale  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  composée de fonctions propres communes aux opérateurs  $P_j$  et  $P$ .

On considère alors le spectre conjoint des opérateurs  $P_1, \dots, P_v$ , c'est-à-dire la partie  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^v$  définie par :

$$(3) \quad \Lambda = \{ \lambda^i = (\lambda_1^i, \dots, \lambda_v^i) ; P_j \varphi_i = \lambda_j^i \varphi_i \} .$$

On cherche à estimer le comportement asymptotique de  $\Lambda$ , c'est-à-dire à étudier la fonction :

$$(4) \quad N(\tau) = \text{card}\{i \in \mathbb{N}; \lambda^i \in \Lambda \cap C, |\lambda^i| \leq \tau\} ,$$

où  $C$  est un cône de sommet  $0$ , fermé dans  $\mathbb{R}^{\nu}$ , dont le bord  $\delta C$  est  $C^1$  par morceaux.

On note  $\Gamma$  l'adhérence de l'image de  $p$  dans  $\mathbb{R}^{\nu}$ , et  $W$  l'ensemble des valeurs critiques de  $p$  :

$$(5) \quad W = \{y \in \mathbb{R}^{\nu}; y = p(x, \xi), \text{ le système } (dp_j(x, \xi))_{j=1, \dots, \nu} \text{ étant lié}\} .$$

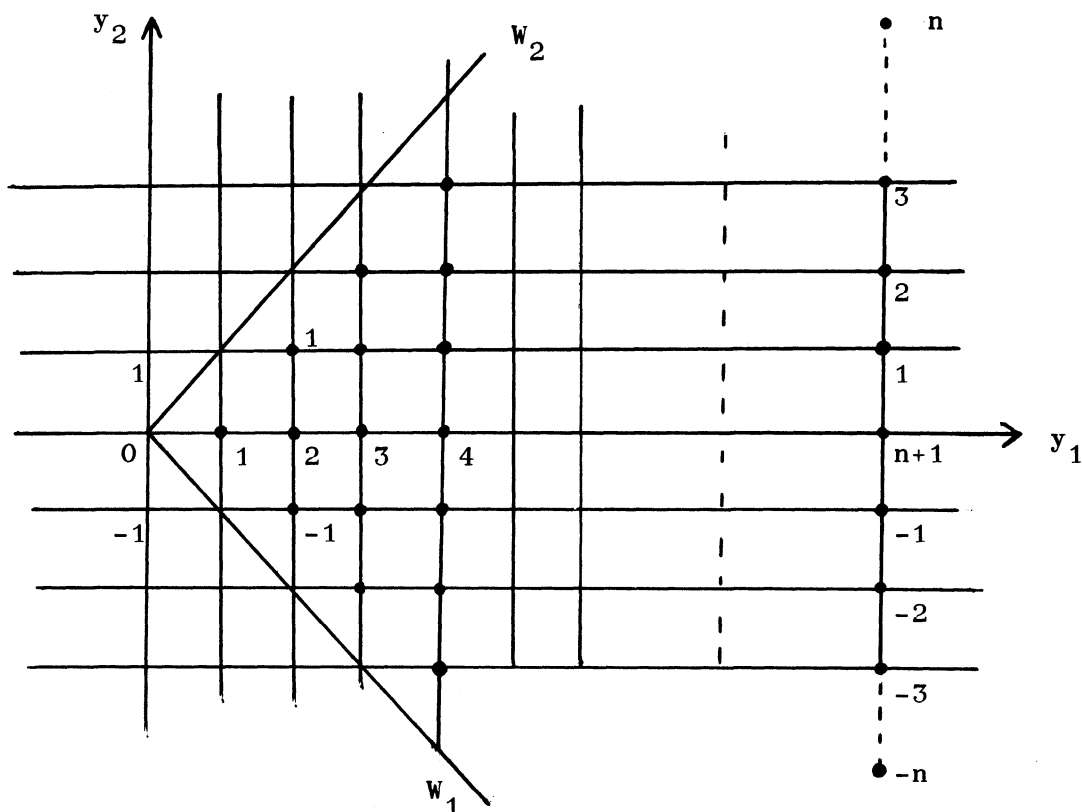
Exemple : Considérons sur  $\mathbb{R}^2$  les opérateurs suivants :

$$\begin{cases} P_1(x, D_x) = -\frac{1}{2} \Delta + |x|^2 \\ P_2(x, D_x) = \frac{1}{i} (x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}) \end{cases}$$

$P_1$  et  $P_2$  vérifient bien les hypothèses ci-dessus et possèdent un système de fonctions propres communes, qui constituent une base de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  s'écrivant sous la forme :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{k,n}(r, \theta) = \Phi_{k,n}(r) \Psi_k(\theta) \quad r \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0, 2\pi] \\ \text{avec} \quad \begin{cases} P_1 \Psi_{k,n} = (n+1) \Psi_{k,n} \\ P_2 \Psi_{k,n} = k \Psi_{k,n} \end{cases} \\ n \in \mathbb{N}, \quad -n \leq k \leq n \quad (k \in \mathbb{Z}) . \end{array} \right.$$

Le spectre conjoint  $\Lambda_0$  de  $P_1$  et  $P_2$  est donc composé des couples  $(n+1, k)$  vérifiant (6). Comme l'image  $\Gamma$  du symbole joint est la partie du demi-plan  $y_1 \geq 0$  comprise entre les deux demi-bissectrices, on constate que  $\Lambda_0$  est l'intersection de l'intérieur de  $\Gamma$ , soit  $\overset{\circ}{\Gamma}$ , avec le réseau  $\mathbb{Z}^2$  des points à coordonnées entières, chacun des couples  $(n+1, k)$  ayant pour multiplicité 1.



Par ailleurs l'ensemble  $W$  des valeurs critiques est formé des deux demi-bissectrices.

Dans ce travail, on estime le comportement de la fonction  $N(\tau)$  définie par (4) quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$ . Puis, sous des hypothèses supplémentaires, on localise les éléments de  $\Lambda$  au voisinage d'un réseau analogue au spectre conjoint de l'exemple ci-dessus, et on estime les multiplicités "approchées" des éléments de  $\Lambda$ .

Une telle étude a été faite par B. Helffer et D. Robert [9] dans le cas d'un opérateur sur  $\mathbf{R}^n$ , et par A. Weinstein [12] et Y. Colin de Verdière [6]-[7] pour des opérateurs sur une variété compacte. Dans l'estimation de  $N(\tau)$  on s'inspire à la fois des méthodes de [9] et de [6]. Par contre, dans la deuxième partie, on reprend la méthode des traces utilisée dans [9], alors que dans [7] Y. Colin de Verdière utilise des méthodes géométriques.

Résultats : Sous les hypothèses  $(H_0)$  et  $(H_1)$  on a les résultats suivants :

Théorème 1 : Soit  $C$  un cône fermé de  $\mathbf{R}^n$ , de sommet  $0$ , tel que  $C \cap \Gamma = \{0\}$ .  
Alors  $C \cap \Lambda$  est fini.

**Théorème 2** : Soit  $C$  un cône fermé de  $\mathbf{R}^v$ , dont le bord  $\delta C$  est  $C^1$  par morceaux et vérifie :  $\delta C \cap W = \emptyset$ . Alors

$$N(\tau) = (2\pi)^{-n} \text{vol } \tilde{p}^{-1}(C \cap \{|y| \leq \tau\}) + o(\tau^{n-1}) \quad , \quad \tau \rightarrow +\infty \quad ,$$

où  $\tilde{p}$  désigne le symbole total joint :  $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_v)$ .

Sous une hypothèse un peu plus technique sur le cône  $C$ , on peut isoler dans le premier terme la contribution du symbole principal  $p$ , qui est en  $\tau^n$ , et celle du  $v$ -uplet des seconds termes qui est en  $\tau^{n-1/2}$  (cf. [5]).

Pour les démonstrations, on peut se référer à [4] et à [5].

On fait maintenant les hypothèses suivantes :

$$(H_2) \quad \tilde{p}_j \sim \sum_{i \geq 0} p_{2-2i}^j \quad ,$$

i.e. on suppose que les degrés d'homogénéité des composantes du développement asymptotique se décalent de deux en deux.

(H<sub>3</sub>) Le flot  $\Phi_j^t$  associé à l'hamiltonien  $p_j$  est périodique de période  $2\pi$ .

Cette hypothèse signifie que les trajectoires  $\{(x(t), \xi(t)) = \Phi_j^t(y, \eta); t \in \mathbf{R}\}$  du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial p_j}{\partial \xi}(x(t), \xi(t)) \\ \frac{d\xi}{dt} = - \frac{\partial p_j}{\partial x}(x(t), \xi(t)) \\ x(0) = y \quad , \quad \xi(0) = \eta \end{cases}$$

sont périodiques et de période indépendante de  $(y, \eta) \in \mathbf{R}^{2n} \setminus \{0\}$ , la valeur  $2\pi$  correspondant à une normalisation.

(H<sub>4</sub>) La moyenne de  $p_0^j$  sur une trajectoire du flot  $\Phi_j^t$  a une valeur indépendante de cette trajectoire :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_0^j(\Phi_j^s(y, \eta)) ds = \gamma_j \quad \forall (y, \eta) \in \mathbf{R}^{2n} - \{0\} \quad .$$

On peut alors énoncer les résultats suivants :

**Théorème 3** : Sous les hypothèses  $(H_0)$  à  $(H_4)$ , il existe des opérateurs  $R_1, \dots, R_\nu$  tels que :

(i) le symbole de Weyl  $r_j$  de  $R_j$  appartient à  $S_\mu^{-2}$  et vérifie :

$$r_j \sim \sum_{s \leq -1} r_{2s}^j ,$$

où  $r_{2s}^j$  est homogène de degré  $2s$ .

(ii)  $[P_i, R_j] = 0$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ ,  $j = 1, \dots, \nu$ .

(iii) Le spectre conjoint  $\Lambda^Q$  des opérateurs  $Q_j = P_j + R_j$  vérifie

$$\Lambda^Q \subset \mathbb{Z}^\nu + \{\sigma\} \quad (\text{avec } \sigma \in \mathbb{R}^\nu) .$$

**Théorème 4** : Sous les hypothèses  $(H_0)$  à  $(H_4)$ , il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que :

$$\Lambda \subset \bigcup_{\tau \in \mathbb{Z}^\nu + \{\sigma\}} B_\tau ,$$

avec  $B_\tau = \prod_{j=1}^\nu \left[ \tau_j - \frac{C_0}{1+|\tau_j|} , \tau_j + \frac{C_0}{1+|\tau_j|} \right]$ .

Principe de la démonstration des théorèmes 3 et 4 :

Pour le théorème 3, on travaille séparément sur chaque opérateur  $P_j$  en construisant  $R_j$  sur les fonctions propres communes  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  grâce aux résultats de [9]. En effet dans cette partie de [9], l'ellipticité globale de l'opérateur étudié n'intervient que pour montrer qu'il opère dans les espaces  $B^s$  définis par :

$$B^s = D \left[ \left( I + \sum_{j=1}^\nu P_j^2 \right)^{s/2} \right]$$

muné de la norme du graphe pour  $s \geq 0$ , et  $B^s = \text{dual de } B^{-s}$  pour  $s < 0$ .

Le fait que  $P_j$  commute avec l'opérateur elliptique  $\sum_{j=1}^\nu P_j^2$  suffit pour cela.

De [9] on déduit donc  $U_j(t) = e^{-itP_j}$  est tel que  $U_j(2\pi)$  soit un opérateur pseudodifférentiel, dont le symbole  $u_j$  s'écrit :

$$u_j = m_j + v_j ,$$

$m_j$  étant un complexe de module 1 qu'on écrit sous la forme  $e^{-2i\pi\sigma_j}$ , et  $v_j$

admettant un développement en composantes homogènes du type  $v_j \sim \sum_{s \leq -1} v_{2s}^j$ ,  
avec  $v_{2s}^j$  homogène de degré  $2s$  en  $(x, \xi)$ , dans  $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ .

On construit  $R_j$  à partir de  $v_j$ .

Le théorème 4 découle du fait que  $R_j$  et  $P_j R_j$  borné.

Soit  $d_\tau$  la multiplicité de  $\tau \in \mathbb{Z}^\nu + \{\sigma\}$  comme élément de  $\Lambda$ . Si les  $B_\tau$  sont disjoints,  $d_\tau$  est aussi égal à :

$$d_\tau = \text{card}\{i \in \mathbb{N}; \lambda^i \in B_\tau\} .$$

Les nombres  $d_\tau$  sont les multiplicités approchées, au sens de Weinstein, des éléments de  $\Lambda$ .

Pour estimer  $d_\tau$  on fait l'hypothèse suivante :

(H<sub>5</sub>) S'il existe un  $\nu$ -uplet  $(t_1, \dots, t_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$  tel qu'il existe  $(y, \eta)$  vérifiant :

$$(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus p^{-1}(W) \text{ et } \Phi_1^{t_1} \circ \dots \circ \Phi_\nu^{t_\nu}(y, \eta) = (y, \eta)$$

alors  $t_j$  est un multiple de  $2\pi$ , pour tout  $j = 1, \dots, \nu$ .

Géométriquement, l'hypothèse (H<sub>5</sub>) signifie que l'action du tore  $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^\nu$  dans  $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$  définie par le flot hamiltonien global

$(t \rightarrow \Phi_1^{t_1} \circ \dots \circ \Phi_\nu^{t_\nu}(y, \eta))$  est injective, sauf éventuellement si  $(y, \eta)$  est un point critique.

**Théorème 5** : Sous les hypothèses (H<sub>0</sub>) à (H<sub>5</sub>), soit  $C$  un cône fermé de  $\mathbb{R}^\nu$ , de sommet 0, tel que :

$$\begin{cases} C \subset \mathbb{R}^\nu \\ C \cap W = \emptyset . \end{cases}$$

Alors  $\exists A > 0 : \forall \tau \in (\mathbb{Z}^\nu + \{\sigma\}) \cap C, |\tau| \geq A$ , on ait :

$$d_\tau = b_0 + b_1(\tau) + \dots + b_{n-\nu}(\tau)$$

où  $b_p(\tau)$  est un polynôme homogène de degré  $p$  en  $\tau$ .

En particulier  $b_{n-\nu}(\tau) = (2\pi)^{-n} \int_{p^{-1}(\tau)} \frac{dS_\tau}{\|dp_1 \wedge \dots \wedge dp_\nu\|}$ , où  $dS_\tau$  est la

mesure de volume canonique sur  $p^{-1}(\tau)$ , et  $\|dp_1 \wedge \dots \wedge dp_\nu\|$  est la norme euclidienne, dans l'espace des  $\nu$ -formes linéaires alternées, du produit extérieur des  $dp_j$ .

**Théorème 6** : On suppose maintenant  $n = \nu$ . Soit  $C$  un cône comme dans le théorème 5. Sous les hypothèses  $(H_0)$  à  $(H_5)$ , et si de plus les fibres de l'application  $p$  sont connexes, alors :

$\exists A > 0$  :  $\forall \tau \in (\mathbb{Z}^\nu + \{\sigma\}) \cap C$ ,  $|\tau| \geq A$ , on ait :

$$d_\tau = 1 .$$

**Corollaire** : Si le cône  $C$  ne contient pas les axes, alors  $\exists A > 0$  tel que  $\forall \tau \in (\mathbb{Z}^\nu + \{\sigma\}) \cap C$  avec  $|\tau| \geq A$  on ait :

$$\Lambda \cap B_\tau = \{\lambda_\tau\} , \quad \lambda_\tau \text{ ayant la multiplicité } 1 .$$

En effet : si le cône  $C$  ne contient pas les axes, on déduit du théorème 6 que la vraie multiplicité de la valeur propre située dans  $B_\tau$  est égale à 1, puisque, si  $A$  est suffisamment grand, les pavés  $B_\tau$  sont disjoints.

Principe des démonstrations des théorèmes 5 et 6 :

Une estimation grossière de  $d_\tau$  en  $O(|\tau|^{n-1})$  permet de définir la trace de l'opérateur  $V(t) = e^{-it_1 Q_1} \circ \dots \circ e^{-it_\nu Q_\nu}$  comme la distribution  $Z(t) \in \mathcal{F}'(\mathbb{R}^\nu)$  égale à  $Z(t) = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}^\nu + \{\sigma\}} d_\tau e^{-i\langle t, \tau \rangle}$ . On peut alors considérer  $d_\tau$  comme le coefficient de Fourier de la distribution  $Z(t) \cdot e^{i\langle t, \sigma \rangle}$  sur le tore ; de sorte que l'on peut écrire :

$$(7) \quad d_\tau = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \text{Trace} \left[ \int_{\mathbb{R}^\nu} \theta(t) V(t) e^{i\langle t, \tau \rangle} dt \right]$$

où  $\theta \in C_0^\infty\left(\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]^{\nu}\right)$  et vérifie  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^\nu} \theta(t - 2\pi k) = 1$ .

L'opérateur dont on prend la trace dans (7) est à noyau dans  $\mathcal{D}$ , et on écrit sa trace comme l'intégrale du noyau sur la diagonale. On a construit dans [5] une approximation de  $V(t)$  au voisinage de  $t = 0$  par un opérateur intégral de Fourier global. On fait ici un découpage de  $\mathbb{R}^\nu$  en pavés  $\pi_h$ ,  $h \in \mathbb{Z}^\nu$ , pour pouvoir approcher  $V(t)$ , sur tout le support de  $\theta(t)$ , par un opérateur Fourier-intégral dont on peut écrire localement, dans chaque pavé  $\pi_h$ , la fonction de phase  $\varphi_h(t, x, \eta)$ , où  $t \in \pi_h$  et  $(x, \eta) \in \mathbb{R}^{2nd}$ ,  $d$  étant



le nombre de variables nécessaires.  $d_\tau$  est alors une somme d'intégrales oscillantes que l'on étudie par la méthode de la phase stationnaire. On en déduit que le support singulier de  $Z(t)$  est contenu dans l'ensemble des périodes du flot global, c-à-d. :

$$\text{Supp Sing } Z(t) \subset \{(t_1, \dots, t_\nu) \in \mathbb{R}^\nu ; \exists (y, \eta) \neq 0 \ \Phi_1^{t_1} \circ \dots \circ \Phi_\nu^{t_\nu}(y, \eta) = (y, \eta)\} .$$

De l'hypothèse  $(H_5)$  on déduit :  $\text{Supp Sing } Z(t) \cap \text{Supp } \theta(t) = \{0\}$ . On obtient alors un développement de  $d_\tau$  en fonctions homogènes de  $\tau$  sous la forme :

$$d_\tau \sim \sum_{i \geq 0} Q_{n-\nu-i}(\tau) , \quad |\tau| \rightarrow +\infty , \quad \tau \in \mathbb{C} ,$$

et la première fonction est égale à l'expression annoncée.

Comme  $d_\tau$  prend des valeurs entières aux points de  $(\mathbb{Z}^\nu + \{\sigma\}) \cap \mathbb{C}$ , on utilise un lemme de Guillemin-Sternberg [8] pour en déduire que  $d_\tau$  se comporte alors comme un polynôme. Pour démontrer le théorème 6, il reste à calculer le premier terme dans le cas  $n = \nu$ . L'hypothèse de connexité des fibres permet de remplacer, au voisinage de la fibre  $p^{-1}(\tau)$  pour tout  $\tau$  dans  $\mathbb{C}$ , les coordonnées  $(x, \xi)$  par les coordonnées action-angles, et le calcul de ce terme donne alors 1. [Cf. par exemple [1].]

Remarque 1 : On se restreint ici à des opérateurs d'ordre 2. Pour des opérateurs d'ordres quelconques on se ramène à cette situation en utilisant le calcul fonctionnel [4].

Remarque 2 : On peut étendre les théorèmes 1 et 2 à des classes d'opérateurs dont les symboles sont somme asymptotique de composantes quasi-homogènes en  $(x, \xi)$  (cf. [5]).

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. Arnold : Méthodes mathématiques de la mécanique classique, Editions MIR, Moscou.
- [2] K. Asada, D. Fujiwara : On some oscillatory integral transformations in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , Jap. J. Math. 4 (1978), p. 299-361.
- [3] R. Beals : A general calculus of pseudodifferential operators, Duke Math. J. 42 (1975), p. 1-42.

- [4] A.M. Charbonnel : Calcul fonctionnel à plusieurs variables pour des opérateurs pseudodifférentiels dans  $\mathbb{R}^n$  (à paraître).
- [5] A.M. Charbonnel : Spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels sur  $\mathbb{R}^n$ , qui commutent (à paraître).
- [6] Y. Colin de Verdière : Spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent, I, le cas non intégrable, Duke Math. J. 46 (1979), p. 169-182.
- [7] Y. Colin de Verdière : Spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent, II, le cas intégrable Math. Z. 171 (1980), p. 51-73.
- [8] V. Guillemin, S. Sternberg : Homogeneous quantization and multiplicities of group representations, (preprint).
- [9] B. Helffer, D. Robert : Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs pseudodifférentiels sur  $\mathbb{R}^n$ , (à paraître dans Comm. in P.D.E.).
- [10] L. Hörmander : On the asymptotic distribution of eigenvalues of pseudodifferential operators in  $\mathbb{R}^n$ , Ark. Mat. 17, 2 (1979), p. 296-313.
- [11] A. Messiah : Mécanique quantique, vol. 2, Dunod 1972.
- [12] A. Weinstein : Asymptotics of the eigenvalues clusters for the lapacian plus a potential, Duke Math. J. 44 (1977), p. 883-892.

\*  
\* \*  
\*