

HENRI-MICHEL MAIRE

**Sous-ellipticité et hypoellipticité maximale pour des systèmes différentiels**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1980), p. 1-2

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1980\\_\\_\\_A9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980___A9_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SOUS-ELLIPTICITE ET HYPOELLIPTICITE MAXIMALE  
POUR DES SYSTEMES DIFFERENTIELS

par H. M. MAIRE

On considère  $2p$  champs de vecteurs réels  $X_j$  de classe  $C^\infty$  sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  satisfaisant la condition de Hörmander d'ordre  $r$  (cf. [1]) et on pose  $L_j = X_j + iX_{p+j}$ ,  $L = (L_1, \dots, L_p)$ .

Définition : Pour  $0 \leq \delta < 1$ ,  $(x_0, \xi_0) \in T^* \setminus 0$ , on dit que le système  $L$  est  $\delta$ -sous-elliptique [resp. hypoelliptique maximal] en  $(x_0, \xi_0)$  si  $u$  et  $L_j u \in H^s$  en  $(x_0, \xi_0)$  entraîne  $u \in H^{s+1-\delta}$  [resp.  $X_k u \in H^s$ ] en  $(x_0, \xi_0)$ .

Cette définition est équivalente à la définition habituelle avec les inégalités a priori (cf. Hörmander [3]). D'après une inégalité de Rothschild-Stein [1] on a : si  $L$  est hypoelliptique maximal en  $(x_0, \xi_0)$ , alors  $L$  est  $\frac{r-1}{r}$ -sous-elliptique en  $(x_0, \xi_0)$ . Par contre le système suivant :

$$L_1 = \partial_{x_1} + i((2\ell + 1)x_1^{2\ell} - x_2^2) \partial_{x_3}$$

$$L_2 = \partial_{x_2} - i2x_1 x_2 \partial_{x_3}$$

est  $\frac{2\ell}{2\ell+1}$ -sous-elliptique mais pas hypoelliptique maximal en  $(0, (0,0,1))$ .

Théorème : Le système  $L$  est  $\delta$  sous-elliptique en  $(x_0, \xi_0) \in T^* \setminus 0$  si et seulement si  $u$  et  $L^* Lu \in H^0$  en  $(x_0, \xi_0)$  entraîne  $u \in H^{2-2\delta}$  et  $Lu \in H^{1-\delta}$  en  $(x_0, \xi_0)$ .

La démonstration emploie les résultats de Kohn-Nirenberg [4] et Sweeney [6]. Le résultat correspondant pour l'hypoellipticité maximale n'est pas connu en général mais est une conséquence des conjectures de Helffer-Nourrigat [2].

Corollaire : L'opérateur  $\square_b$  pour le domaine faiblement pseudo-convexe  $\{t \in \mathbb{C}^3; \text{Im } z_3 = |z_1|^4 + |z_2|^4\}$  est hypoelliptique avec perte de  $\frac{3}{2}$  dérivées (cf. Rothschild [5]).

Dans la suite, on suppose que  $L$  a la forme :

$$L_j = \partial_{t_j} + b_j(t, x, D_x) \quad j = 1, \dots, p, \quad t \in \mathbb{R}^p, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où  $b(t, x, \xi) = \text{grad}_t B(t, x, \xi)$ , avec  $B$  linéaire en  $\xi$  et analytique en  $(t, x)$ .

Proposition : Soit  $(t_0, x_0, \xi_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ . Le système L est hypoelliptique maximal en  $(t_0, x_0, 0, \xi_0)$  si et seulement si il existe un voisinage compact K de  $t_0$ , un voisinage conique  $\Gamma$  de  $(x_0, \xi_0)$  et  $C > 0$  tels que :

$$\|\partial_t v\| + \|b(t, x, \xi)v\| \leq C(\|L(t, x, \partial_t, \xi)v\| + \|v\|), \quad \forall v \in C_0^\infty(K), \quad \forall (x, \xi) \in \Gamma.$$

Notation : Si m est l'ordre d'annulation de  $B(\cdot, x_0, \xi_0)$  en  $t_0$ , on note  $\mathcal{C}_{(t_0, x_0, \xi_0)}^{(B)}$  le cône tangent au sous-ensemble de niveau  $B = B(t_0, x_0, \xi_0)$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}_{(t_0, x_0, \xi_0)}^{(B)} = \left\{ t \in \mathbb{R}^p ; \sum_{|\alpha|=m} (t-t_0)^\alpha \frac{\partial^\alpha B}{\partial t^\alpha}(t_0, x_0, \xi_0) / \alpha! = 0 \right\}$$

Théorème : Pour  $(t_0, x_0, \xi_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ , on suppose qu'il existe un voisinage compact K de  $t_0$ , un voisinage conique  $\Gamma$  de  $(x_0, \xi_0)$  et en chaque  $t \in K$  une courbe  $\gamma_t$  tels que :

- (i)  $\forall t \in K, \gamma_t$  coupe  $\mathcal{C}_{(t, x_0, \xi_0)}^{(B)}$  transversalement ;
- (ii)  $\forall (t, x, \xi) \in K \times \Gamma, B|_{\gamma_t}$  est monotone .

Alors le système L est hypoelliptique maximal en  $(t_0, x_0, 0, \xi_0)$ .

Remarque : Pour B indépendant de  $x$  et  $n = 1$ , la condition du théorème est aussi nécessaire avec  $\gamma_t$  courbe intégrale du champ  $b(t, \xi_0)$ .

- 
- [1] B. Helffer et J. Nourrigat : Approximation d'un système de champs de vecteurs et application à l'hypoellipticité, Arkiv för Mat. 17 (1979), p.237.
  - [2] B. Helffer et J. Nourrigat : Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champ de vecteurs, Ces "Journées E.D.P. 1980".
  - [3] L. Hörmander : Subelliptic operators, in Seminar on singularities of solutions of linear partial differential equations, Princeton 1978.
  - [4] J. J. Kohn and L. Nirenberg : Noncoercive boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), p.443.
  - [5] L. P. Rothschild : Nonexistence of optimal  $L^2$  estimates..., to appear.
  - [6] W. J. Sweeney : A characterization of local subellipticity for pseudodifferential complexes, J. Diff. Equations 13 (1973), p.495.