

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MOHAMED S. BAOUENDI

FRANÇOIS TRÈVES

Sur quelques propriétés de champs de vecteurs complexes intégrables

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A8_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES PROPRIETES DE CHAMPS DE
VECTEURS COMPLEXES INTEGRABLES

par M. S. BAOUENDI et F. TREVES

On donne un résumé succinct d'un travail à paraître sous le titre :

"A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields".

Soient L_1, \dots, L_n des champs de vecteurs complexes linéairement indépendants à coefficients C^∞ dans Ω , voisinage ouvert de l'origine de \mathbb{R}^{n+m} . On suppose qu'il existe n fonctions z^1, \dots, z^n dans $C^\infty(\Omega)$ satisfaisant :

$$L_j z^k = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k, n,$$

$$z^k(0) = 0, \quad \text{et } dz^1, \dots, dz^n \text{ linéairement indépendants dans } \Omega.$$

Le résultat principal de ce travail est le théorème d'approximation suivant :

Théorème 1 : Sous les hypothèses précédentes, pour tout voisinage ouvert de l'origine $\Omega' \subset \Omega$, il existe un autre voisinage ouvert $\Omega'' \subset \Omega'$ tel que toute fonction h continue dans Ω' et solution du système

$$(1) \quad L_j h = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

est limite uniforme dans Ω'' de polynômes en $z = (z^1, \dots, z^n)$.

On a un résultat similaire si h est une distribution solution de (1).

Comme corollaire immédiat du Théorème 1, nous obtenons la constante de h sur les fibres de l'application $z : \Omega'' \rightarrow \mathbb{C}^n$, i.e. $h(\omega_1) = h(\omega_2)$ si $\omega_1, \omega_2 \in \Omega''$ et $z(\omega_1) = z(\omega_2)$. Il en résulte alors que si $h \in C^0(\Omega')$ satisfait (1), on a

$$(2) \quad h \Big|_{\Omega''} = \tilde{h} \circ z$$

où $\tilde{h} \in C^0(z(\Omega''))$. La formule de dérivation des fonctions composées montre en fait que h satisfait les équations de Cauchy-Riemann induites sur $z(\Omega'') \subset \mathbb{C}^n$.

On donne maintenant une application du Théorème 1 et de (2) à l'hypoellipticité analytique du système (1) quand les coefficients des L_j , $1 \leq j \leq m$, sont des fonctions analytiques dans Ω . Dans ce cas, les équations de Cauchy-Riemann induites mentionnées plus haut peuvent être prises au sens habituel sur les parties lisses de $z(\Omega'')$.

Définition : On suppose que les coefficients de L_j , $1 \leq j \leq m$, sont analytiques dans Ω . On dit que le système $L = (L_1, \dots, L_m)$ est hypoelliptique analytique en 0 si et seulement si toute distribution u dans Ω' , voisinage ouvert de 0, telle que $L_j u$ est analytique pour $j = 1, \dots, m$, est elle-même analytique dans un voisinage Ω'' de l'origine.

Si le système L est hypoelliptique analytique en tout point de Ω , on retrouve la définition habituelle de l'hypoellipticité analytique dans un ouvert.

On a le résultat suivant :

Théorème 2 : Pour que le système L soit hypoelliptique analytique à l'origine il faut et il suffit que pour tout voisinage de l'origine $\Omega' \subset \Omega$, il existe un voisinage ouvert \mathcal{O} de l'origine dans \mathbb{C}^n tel que si $f \in C^1(z(\Omega'))$ et satisfait les équations de Cauchy-Riemann induites, elle se prolonge holomorphiquement à \mathcal{O} .

Si $n = 1$, on obtient le résultat suivant : pour que L soit hypoelliptique analytique à l'origine il faut et il suffit que z transforme tout voisinage de 0 dans Ω en un voisinage de 0 dans \mathbb{C} . On donne l'exemple d'un champ de vecteurs dans \mathbb{R}^2 qui est hypoelliptique analytique en 0 et qui n'est hypoelliptique analytique dans aucun ouvert contenant 0.

Dans le cas $n = 2$, on montre que le champ de vecteurs dans \mathbb{R}^3

$$\partial_t + i \partial_{x_1} + i t^2 \partial_{x_2}$$

est hypoelliptique analytique en 0.

On donne aussi l'exemple de deux champs de vecteurs L_1, L_2 dans \mathbb{R}^4 , à coefficients polynomiaux, tels que le système $L = (L_1, L_2)$ est hypoelliptique analytique dans \mathbb{R}^4 mais n'est C^∞ hypoelliptique dans aucun voisinage ouvert de l'origine de \mathbb{R}^4 . La non C^∞ hypoellipticité de ce système a été montrée auparavant par H. M. Maire.

*
*
*