

MONIQUE DAUGE

Résultats de régularité, singularité et indice pour l'opérateur de Stokes dans un polygone

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980___A4_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RESULTATS DE REGULARITE, SINGULARITE ET INDICE
POUR L'OPERATEUR DE STOKES DANS UN POLYGONE.

par M. DAUGE

INTRODUCTION

L'opérateur de Stokes associe au couple vitesse-pression (\vec{W}, p) le couple force-divergence (\vec{F}, g) par :

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{W} + \text{grad } p &= \vec{F} \\ \text{div } \vec{W} &= g \end{aligned}$$

Nous nous plaçons ici en dimension 2. $\vec{W} = (w_1, w_2)$ $\vec{F} = (f_1, f_2)$. Voici l'écriture matricielle de l'opérateur :

$$\begin{pmatrix} -\Delta & 0 & D_x \\ 0 & -\Delta & D_y \\ D_x & D_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ g \end{pmatrix}$$

ce que nous noterons : $B u = f$

Ce système est elliptique au sens de ADN [1] sur un domaine Ω avec les conditions complémentaires : $w_1|_{\partial\Omega} = 0, w_2|_{\partial\Omega} = 0$. Ainsi le but de cette étude est de dégager des résultats de régularité, singularité et indice pour l'opérateur de Stokes avec données nulles aux bords sur un domaine Ω polygonal.

Pour arriver au polygone, il sera auparavant nécessaire d'effectuer l'étude du problème "modèle" sur le secteur plan.

On se placera dans des espaces fonctionnels adaptés à la géométrie des domaines.

1. PROBLEME MODELE SUR LE SECTEUR PLAN

Ω désigne un secteur plan de sommet 0. Soit ω son ouverture. Rappelons la définition des espaces de Sobolev à double poids introduits par Pham The Lai dans son étude du laplacien, [7]. Pour m entier positif et θ_0, θ_∞ deux réels vérifiant $\theta_0 \leq \theta_\infty$:

$$H_{\theta_0, \theta_\infty}^m(\Omega) = \{u \in L_{loc}^2(\Omega) / r^{\theta_0 - m + |\alpha|} (1+r)^{\theta_\infty - \theta_0} D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

r désigne la distance à 0.

On considère les espaces suivants adaptés aux ordres de dérivation intervenant dans \mathcal{B} :

$$D_{\theta_0, \theta_\infty}^m(\Omega) = \{(w_1, w_2, p) \in H_{\theta_0, \theta_\infty}^{m+2} \times H_{\theta_0, \theta_\infty}^{m+2} \times H_{\theta_0, \theta_\infty}^{m+1}(\Omega) / w_1|_{\partial\Omega}, w_2|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$E_{\theta_0, \theta_\infty}^m(\Omega) = H_{\theta_0, \theta_\infty}^m \times H_{\theta_0, \theta_\infty}^m \times H_{\theta_0, \theta_\infty}^{m+1}(\Omega).$$

\mathcal{B} envoie $D_{\theta_0, \theta_\infty}^m(\Omega)$ dans $E_{\theta_0, \theta_\infty}^m$ ce qu'on notera $\mathcal{B}_{\theta_0, \theta_\infty}^m$.

Le fait que $\mathcal{B}_{\theta_0, \theta_\infty}^m$ soit ou non à indice dépend :

i) des paramètres $\eta_0 = \theta_0 - (m+1)$

$\eta_\infty = \theta_\infty - (m+1)$ caractéristiques des espaces.

ii) de l'emplacement des zéros de la fonction entière sur \mathbb{C} discriminante pour le problème de Stokes et relative à l'ouverture ω :

$$F(\tau) = \frac{\text{sh}^2 \tau \omega - \tau^2 \sin^2 \omega}{\tau^2}$$

La multiplicité des zéros de F est 1 ou 2.

\mathcal{F} désignera l'ensemble des zéros de F , \mathcal{F}' celui des zéros doubles.

Théorème 1 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) F n'a pas de zéro de partie imaginaire η_0 ou η_∞ (hypothèse $\mathcal{H}_{\theta_0, \theta_\infty}^m$).

(2) L'image de $\mathcal{B}_{\theta_0, \theta_\infty}^m$ est fermée. $\mathcal{B}_{\theta_0, \theta_\infty}^m$ est alors à indice et on a précisément :

a) $\mathcal{B}_{\theta_0, \theta_\infty}^m$ est injectif

b) $\text{Codim Im } \mathcal{B}_{\theta_0, \theta_\infty}^m = \text{card}(\mathcal{F} \cap C_{\eta_0, \eta_\infty}) + \text{card}(\mathcal{F}' \cap C_{\eta_0, \eta_\infty})$

où C_{η_0, η_∞} désigne la bande : $\{\tau \in \mathbb{C} / \text{Im } \tau \in]\eta_0, \eta_\infty[\}$.

Dans le théorème suivant nous explorons la situation quand le second membre g n'appartient pas forcément à $\text{Im } \mathcal{B}_{\theta_0, \theta_\infty}^m$

Théorème 2 : Supposons $\mathcal{H}_{\theta_0, \theta_\infty}^m$ vraie et soit $g \in E_{\theta_0, \theta_\infty}^m(\Omega)$. Alors il existe dans $D_{\theta_0, \theta_\infty}^m$ un unique antécédent de g, u_0 et dans $D_{\theta_\infty, \theta_0}^m$ un unique antécédent de g, u_∞ . On a :

$$u_\infty - u_0 = \sum_{\tau \in \mathcal{I} \cap C_{\eta_0, \eta_\infty}} \lambda_\tau Y_\tau + \sum_{\tau \in \mathcal{J} \cap C_{\eta_0, \eta_\infty}} \mu_\tau Z_\tau$$

où λ_τ et μ_τ sont des formes linéaires de g , Y_τ et Z_τ sont des singularités dont la forme ne dépend que de τ : en coordonnées polaires :

$$Y_\tau = (r^{i\tau} y_1(\theta), r^{i\tau} y_2(\theta), r^{i\tau-1} y_3(\theta))$$

$$Z_\tau = (r^{i\tau} [z_1 + iy_1 \text{Log } r], r^{i\tau} [z_2 + iy_2 \text{Log } r], r^{i\tau-1} [z_3 + iy_3 \text{Log } r])$$

les y_j et z_j sont des fonctions C^∞ en θ dont l'expression dépend de τ .

Le lien entre les deux théorèmes provient de ce que :

- i) $g \in \text{Im } \mathcal{B}_{\theta_0, \theta_\infty}^m$ équivaut à $u_0 = u_\infty$ (ils appartiennent alors tous deux à $D_{\theta_0, \theta_\infty}^m(\Omega)$).
- ii) $u_0 = u_\infty$ équivaut à : toutes les formes linéaires λ_τ et μ_τ s'annulent en g .

Remarque : A l'inverse de la fonction discriminante du biharmonique, égale à

$$\frac{F(\tau)}{\tau^2 + 1}, \quad F \text{ s'annule toujours en } i \text{ et } -i. \text{ Pour ces valeurs de } \tau \text{ on rencontre des}$$

situations particulières :

* en i : $\lambda_\tau(f_1, f_2, g) = \int_\Omega g \, dx \, dy$ (cf. condition de résolution du problème variationnel sur un borné).

* en $-i$: $Y_\tau = (0, 0, 1)$. D'où la possibilité d'obtenir des résultats quand η_0 ou η_∞ égale -1 , en dépit que l'hypothèse $\mathcal{H}_{\theta_0, \theta_\infty}^m$ ne soit pas vérifiée.

Pour clore ce paragraphe, disons quelques mots du mode de démonstration de ces divers résultats :

Par transformation conforme puis transformation de Fourier partielle appliquées au système $\mathcal{B}u = g$, on arrive au système à une variable, paramétré en

$\tau : R_\tau z_\tau = l_\tau$, $\forall \tau \in C_{\eta_0, \eta_\infty}$ où l_τ est analytique à valeurs dans $H^m \times H^m \times H^{m+1}$ ($]0, \omega[$) et se déduit directement de \mathcal{J}

R_τ est défini de $H^1_0 \times H^1_0 \times L^2(]0, \omega[)$ dans $H^{-1} \times H^{-1} \times L^2(]0, \omega[)$ par

$$R_\tau(u, v, q) = (l_1, l_2, l_3) \text{ avec } \begin{aligned} l_1 &= u'' + (i\tau + 1)^2 - (i\tau - 1)q \\ l_2 &= (i\tau - 1)u' + (\tau^2 + 1)v + q' \\ l_3 &= (i\tau + 1)u + v' \end{aligned}$$

Les zéros de F apparaissent comme pôles de la fonction méromorphe $\tau \rightarrow R_\tau^{-1}$. Les résidus de $\tau \rightarrow R_\tau^{-1} l_\tau$ fournissent les morceaux de la partie singulière : $\lambda_\tau Y_\tau +$ éventuellement $\mu_\tau Z_\tau$. Les Y_τ se construisent à partir du noyau de R_τ et les formes linéaires de λ_τ à partir de l'alternative de Fredholm relative à R_τ (noyau de R_τ^*). La situation est plus complexe dans le cas où τ est zéro double de F .

2. PROBLEME SUR LE POLYGONE

Ω désigne un polygone connexe, dont la frontière n'a pas de point double, de sommets S_1, \dots, S_N .

On désignera par ω_j l'ouverture de Ω au voisinage de S_j et par φ_j une fonction de troncature au voisinage de S_j .

2.1 Dans des espaces à poids

Après les espaces employés sur le secteur, il est naturel de définir pour m entier positif et $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N) \in \mathbb{R}^N$:

$$\pi_\Theta^m(\Omega) = \{u \in H_{loc}^m(\Omega) / r_j^{\theta_j - m + |\alpha|} D^\alpha(\varphi_j u) \in L^2(\Omega), j = 1, \dots, N, |\alpha| \leq m\}$$

De la même façon que dans le § 1, on définit $D_\Theta^m(\Omega)$, $E_\Theta^m(\Omega)$ et \mathcal{B}_Θ^m qui envoie $D_\Theta^m(\Omega)$ dans $E_\Theta^m(\Omega)$.

Nous avons un théorème qui fait pendant au théorème 1 :

De façon analogue : $\eta_j = \theta_j - (m+1)$ et F_j désigne la fonction discriminante relative à l'ouverture ω_j .

Théorème 3 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\forall j \in \{1, \dots, N\}$ F_j n'a pas de zéro de partie imaginaire η_j (hyp. \mathcal{H}_θ^m)
 (2) L'image de \mathcal{B}_θ^m est fermée.

\mathcal{B}_θ^m est alors à indice et :

$$\text{Ind } \mathcal{B}_\theta^m = \sum_{j=1}^N (\text{card } \mathcal{F}_j \cap C_{0, \eta_j} + \text{card } \mathcal{F}'_j \cap C_{0, \eta_j}) \\ - \sum_{j=1}^N (\text{card } \mathcal{F}_j \cap C_{\eta_j, 0} + \text{card } \mathcal{F}'_j \cap C_{\eta_j, 0})$$

Mais ici, en général, \mathcal{B}_θ^m n'est pas injectif !

Cas particulier important : quand tous les η_j sont négatifs ; on a alors

$$D_\theta^m(\Omega) \hookrightarrow H_0^1 \times H_0^1 \times L^2(\Omega) \\ E_\theta^m(\Omega) \hookrightarrow H^{-1} \times H^{-1} \times L^2(\Omega)$$

On est alors dans le cadre d'une résolution variationnelle du problème (voir Temam [8]).

Théorème 4 : On fait l'hypothèse \mathcal{H}_θ^m .

Soit $g = (f_1, f_2, \dots) \in E_\theta^m$ tel que $\int_\Omega g \, dx \, dy = 0$

Soit $u \in H_0^1 \times H_0^1 \times L^2(\Omega)$ une solution du problème variationnel. u se décompose en la somme d'une partie régulière $u_0 \in D_\theta^m$ et d'une partie singulière :

$$\sum_{j=1}^N \left(\sum_{\tau \in \mathcal{F}_j \cap C_{\eta_j, 0}} \lambda_{j\tau} u_{j\tau} + \sum_{\tau \in \mathcal{F}'_j \cap C_{\eta_j, 0}} \mu_{j\tau} v_{j\tau} \right)$$

où $\lambda_{j\tau}$ et $\mu_{j\tau}$ sont des scalaires,

$$u_{j\tau} = \varphi_j Y_{j\tau} \text{ avec } Y_{j\tau} \text{ la singularité correspondant à } \omega_j \text{ et } \tau$$

$$v_{j\tau} = \varphi_j Z_{j\tau} \text{ , idem .}$$

Le résultat de Osborn [6] correspond à ce théorème pour $\theta = \emptyset$ où \emptyset désigne le poids nul $(0, \dots, 0)$.

Cas particulier : $\eta_j = 0 \quad \forall j$, donc $\theta_j = m+1$; la partie singulière est absente.

Autre cas : $\eta_j = -1 \quad \forall j$, donc $\theta_j = m$. \mathcal{H}_θ^m n'est pas vérifiée.

Mais lorsqu'aucune des ouvertures ω_j ne vérifie la relation $\operatorname{tg} \omega_j = \omega_j$, on a une décomposition en partie régulière et singulière du même type, mais avec \mathcal{U}_0 vérifiant seulement :

$$w_1, w_2 \in \pi_\theta^{m+2}(\Omega), D_{x^p}, D_{y^p} \in \pi_\theta^m, \text{ où bien sûr } (w_1, w_2, p) = \mathcal{U}_0.$$

La partie singulière est absente si Ω est convexe : en effet

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(\mathcal{F}_j \cap C_{-1,0}) + \operatorname{card}(\mathcal{F}'_j \cap C_{-1,0}) &= 0 & \text{si } \omega_j < \pi \\ &= 1 & \text{si } \pi < \omega_j < \omega_0 \\ &= 2 & \text{si } \omega_j > \omega_0 \end{aligned}$$

où ω_0 désigne l'unique valeur $\in]0, 2\pi[$ telle que $\operatorname{tg} \omega_0 = \omega_0$. On retrouve le résultat de Kellogg et Osborn [4] qui correspond au cas $m = 0$, Ω convexe.

2.2 Dans les espaces ordinaires

Soit $D^m(\Omega) = (H^{m+2} \cap H^1_0) \times (H^{m+2} \cap H^1_0) \times H^{m+1}(\Omega)$

$$E^m(\Omega) = H^m \times H^m \times H^{m+1}(\Omega)$$

On est évidemment dans le cadre variationnel.

On note \mathcal{B}^m l'opérateur de Stokes : $D^m(\Omega) \longrightarrow E^m(\Omega)$. Voici d'abord le théorème d'indice :

Théorème 5 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\forall j \quad \mathcal{F}_j$ n'a pas de zéro de partie imaginaire $-(m+1)$

(2) L'image de \mathcal{B}^m est fermée.

$$\text{On a alors } \operatorname{Ind} \mathcal{B}^m = \sum_{j=1}^N (\operatorname{card} \mathcal{F}_j \cap C_{-(m+1),0} + \operatorname{card} \mathcal{F}'_j \cap C_{-(m+1),0})$$

N. B. Le cas $m = 0$ entre dans le cadre du § précédent car $H^2 \cap H^1_0 = \pi^2_\emptyset \cap H^1_0$

Remarquons que la condition (1) n'est autre que l'hypothèse \mathcal{H}_θ^m et que $\operatorname{Ind} \mathcal{B}^m = \operatorname{Ind} \mathcal{B}^m_\emptyset$. En fait \mathcal{B}^m et \mathcal{B}^m_\emptyset sont très liés. Nous allons voir comment dans la recherche des singularités. Introduisons pour $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} E^m_A(\Omega) &= \{(f_1, f_2, g) \in E^m(\Omega) / D^\alpha_k f_k(S_j) = 0 \quad j = 1, \dots, N, \quad |\alpha| \leq m - 2, k = 1, 2 \\ & \quad D^\alpha g(S_j) = 0 \quad j = 1, \dots, N, \quad |\alpha| \leq m - 1\} \end{aligned}$$

Nous avons

$$\forall g \in E_A^m(\Omega) \quad , \quad \exists u \in D^m(\Omega) \quad g - \mathcal{B}u \in E_0^m .$$

Ce résultat n'est pas trivial car, quoique $\forall \varepsilon > 0 \quad E_A^m$ s'injecte dans $E_{(\varepsilon, \dots, \varepsilon)}^m$, E_A^m n'est pas inclus dans E_0^m . La démonstration s'inspire de Kondrat'ev [5], § 4.

Il reste à faire l'étude, pour chaque $j \in \{1, \dots, N\}$, du problème modèle avec second membre polynômial sur le secteur Ω_j qui coïncide avec Ω au voisinage de S_j . Le second membre appartient à Q^m , où $Q^m = \{(f_1, f_2, g) \in \mathcal{P}[X, Y]^3 / d^0 f_1, d^0 f_2 \leq m-2, d^0 g \leq m-1\}$. On cherche la solution dans :

$$P_j^m = \{(w_1, w_2, p) \in \mathcal{P}[X, Y]^3 / d^0 w_k \leq m \quad w_k|_{\partial\Omega_j} = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2 \\ d^0 p \leq m-1 \}$$

P_j^m et Q^m sont de même dimension et \mathcal{B} envoie P_j^m dans Q^m . Mais la codimension de l'image est 1 : $(0, 0, 1)$ n'est pas atteint. On construit alors W_j^* le plus régulier possible, vérifiant les conditions aux bords et tel que $\mathcal{B}W_j^* = (0, 0, 1)$. On obtient une expression de la forme :

$$W_j^* = w_0 + w_1 \log r + w_2 \theta + w_3 (\log r)^2 + w_4 \theta \log r + w_5 \theta^2$$

où les w_k sont de la forme $a_k(x - X_j) + b_k(y - Y_j)$ avec (X_j, Y_j) les coordonnées de S_j . Les w_k pour $k = 1, \dots, 5$ ne sont pas tous nuls.

$W_j = \varphi_j W_j^*$ appartient à $H_0^1 \times H_0^1 \times L^2$ et pas à $D^m(\Omega)$. On a le théorème de décomposition de "la" solution variationnelle u du problème de Stokes avec second membre $(f_1, f_2, g) \in E^m$, tel que $\int_{\Omega} g = 0$.

Théorème 6 :

$$u = u_0 + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{\substack{\tau \in \mathcal{F}_j \cap C_{-(m+1), 0} \\ \tau \neq -i}} \lambda_{j\tau} u_{j\tau} + \sum_{\tau \in \mathcal{F}'_j \cap C_{-(m+1), 0}} \mu_{j\tau} v_{j\tau} + g(S_j) W_j \right)$$

où $u_0 \in D^m(\Omega)$.

Exemple : Si Ω est un rectangle, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \sum_{j=1}^N g(S_j)W_j$ pour $m = 1$.

Remarque : On retrouve le résultat de Grisvard [2] pour $g = 0$, car, dans ce cas, les singularités W_j n'apparaissent pas .

-
- [1] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg : Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II, Comm. Pure Appl. Math. 17 (1964), 35-92.
- [2] P. Grisvard : Singularité des solutions du problème de Stokes dans un polygone Université de Nice (1979), preprint.
- [3] Guillement : Problème biharmonique dans un secteur plan. Séminaire d'analyse Nantes (1978/79) 143-160.
- [4] R. B. Kellogg, J. E. Osborn : A regularity result for the Stokes problem in a convex polygon. J. of functional analysis, Vol. 21 (1976) 397-431.
- [5] V.A. Kondrat'ev : Boundary problems for elliptic equations with conical or angular points. Trans. Moscow Math. Soc. 16 (1967) 227-313 translated by Amer. Math. Soc. (1968).
- [6] J. E. Osborn : Regularity of solutions of the Stokes problem in a polygonal domain. Numerical solution of Partial Differential Equations III, Synspade ed. B. Hubbard, Ac. Press (1975) 393-411.
- [7] Pham The Lai : Problème de Dirichlet dans un cône avec paramètre spectral pour une classe d'espaces de Sobolev à poids. Comm. in Partial Differential Equations 4 (4), 389-445 (1979).
- [8] Temam : Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis. North-Holland.

*
*
*