

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

GERD GRUBB

## Sur la résolvante et le calcul fonctionnel des problèmes aux limites pseudo-différentiels

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1980), p. 1-4

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1980\\_\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980___A3_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA RESOLVANTE ET LE CALCUL FONCTIONNEL DES  
PROBLEMES AUX LIMITES PSEUDO-DIFFERENTIELS

par Gerd GRUBB

On considère un opérateur pseudo-différentiel classique  $P$  matriciel d'ordre  $d$  entier  $> 0$ , défini dans un voisinage  $\Sigma$  d'une variété  $C^\infty$  compacte  $\bar{\Omega}$  de dimension  $n$ , de bord  $\Gamma$  et d'intérieur  $\Omega$ . On suppose que  $P$  ait la propriété de transmission à  $\Gamma$ , voir Boutet de Monvel [1]. Soit  $T$  un opérateur de trace (e.g. différentiel d'ordre  $< d$ ). On suppose qu'il existe un voisinage  $V$  de  $\bar{\mathbb{R}}_-$  dans  $\mathbb{C}$  tel que :

(i)  $p^o(x, \xi) - \lambda I$  (symbole principal intérieur) est inversible pour tout  $(x, \xi) \in T^*(\bar{\Omega}) \setminus 0$ ,  $\lambda \in V$  ;

(ii) l'opérateur

$$\begin{pmatrix} p^o(x', 0, \xi', D_n)_\Omega - \lambda I \\ t^o(x', \xi', D_n) \end{pmatrix} : \mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+)^N \longrightarrow \begin{matrix} \mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+)^N \\ \times \\ \mathbb{C}^M \end{matrix}$$

(symbole principal au bord) est inversible pour tout  $(x', \xi') \in T^*(\Gamma) \setminus 0$ ,  $\lambda \in V$ .

$P_T$  désigne la réalisation de  $P_\Omega$  de domaine  $D(P_T) = \{u \in H^d(\Omega) \mid Tu = 0\}$ , et  $R_\lambda$  sa résolvante  $R_\lambda = (P_T - \lambda I)^{-1}$  ; on montre que  $R_\lambda \in L(L^2(\Omega))$  pour  $\lambda$  dans un voisinage  $V' \subset V$  de  $\bar{\mathbb{R}}_-$ .

Soit  $Q_\lambda$  une paramétrix de  $P - \lambda I$  dans  $\Sigma$ , alors

$$\begin{pmatrix} P_\Omega - \lambda I \\ T \end{pmatrix} \text{ a l'invers } \begin{pmatrix} R_\lambda & K_\lambda \end{pmatrix},$$

où

$$R_\lambda = Q_{\lambda, \Omega} + G_\lambda \quad (\text{pour } \lambda \in V') ;$$

$K_\lambda$  est un opérateur de Poisson et  $G_\lambda$  un opérateur de Green singulier (o.g.s.) [1]. On veut décrire  $R_\lambda$  ; la difficulté est la description de  $G_\lambda$ . -La théorie s'applique e.g. à la théorie spectrale (étude de valeurs propres), et le calcul fonctionnel, où on définit :

$$(1) \quad f(P_T) = \frac{1}{2\pi} \int_C f(\lambda) R_\lambda \, d\lambda,$$

pour une fonction  $f$  analytique au voisinage du spectre de  $P_T$ ,  $C$  entourant  $\text{sp}(P_T)$ .

Rappelons la définition d'un o.g.s.  $G$  d'ordre  $m$ , en coordonnées locales :

$$Gu = \text{Op}'(g(x', \xi', D_n))u = (2\pi)^{-n+1} \int e^{ix'\xi'} g(x', \xi', D_n) u(\hat{\xi}', x_n) d\xi',$$

où

$$g(x', \xi', D_n) = \sum_{1 \leq j < r} k_j(x', \xi', D_n) \gamma_j + g'(x', \xi', D_n);$$

ici les  $k_j$  sont des opérateurs de Poisson,  $\gamma_j u = D_n^j u(0)$ , et  $g'(x', \xi', D_n)$  est l'opérateur Hilbert-Schmidt à noyau

$$\tilde{g}'(x', \xi', x_n, y_n) = \sum_{k, l \geq 0} c_{kl}(x', \xi') \varphi_n(x_n \langle \xi' \rangle) \varphi_l(y_n \langle \xi' \rangle),$$

où  $(\varphi_k(t))_{k \geq 0}$  est une variante du système orthogonal des fonctions de Laguerre dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$ ; on suppose que pour tout  $\alpha', \beta', N$  et  $N'$  on ait, localement en  $x'$ ,

$$\begin{aligned} \|(D_x^{\beta'}, D_\xi^{\alpha'} c_{kl})\|_{\ell^2_{N, N'}} &= \left( \sum_{k, l \geq 0} |(1+k)^N (1+l)^{N'} D_x^{\beta'} D_\xi^{\alpha'} c_{kl}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sigma(\langle \xi' \rangle^{1+m-|\alpha'|}) \quad \text{pour } |\xi'| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Une première étude de  $G_\lambda$  a été faite dans Grubb [2] dans le cas où  $p^\circ(x, \xi)$  est indépendant de  $x_n$  au voisinage du bord.

Une difficulté dans l'étude de  $Q_\lambda$  et  $G_\lambda$  dans le cas o.p.d. est que  $p^\circ(x, \xi) - \lambda I$ , considéré comme fonction de  $(\xi, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+$ , où  $\mu = (-\lambda)^{1/d}$ , a une singularité à l'axe  $\xi = 0$  (on le prend, ou bien  $C^\infty$  et non homogène pour  $|\xi| < 1$ , ou bien homogène et non  $C^\infty$  là); en particulier,  $D_\xi^\alpha (p^\circ - \lambda I)^{-1}$  est  $\mathcal{O}(|\xi|^{d-|\alpha|} |\xi, \mu|^{-2d})$  pour  $|\alpha| \geq d$ . Cela conduit à des classes de symboles  $S^{m, \nu}$  (d'ordre  $m$  et régularité  $\nu \in \mathbb{R}$ ), où

$$S^{m, \nu} \cdot S^{m', \nu'} \subset S^{m+m', \min(\nu, \nu', \nu+\nu')},$$

et des classes semblables pour les suites de coefficients  $(c_{kl})_{k, l \in \mathbb{N}}$  avec les normes  $\|\cdot\|_{\ell^2_{N, N'}}$ .

**Théorème 1** : Soit  $\kappa = (|\xi'|^2 + \mu^2 + 1)^{1/2}$ . Le symbole de  $G_\lambda$  est de la forme  $g(x', \xi', \xi_n, \eta_n, \lambda) \sim g_{-d} + g_{-d-1} + \dots$ , où les  $\tilde{g}_{-d-j}(x', \xi', x_n, y_n, \lambda) = \mathcal{F}_{\xi_n}^{-1} \mathcal{F}_{\eta_n}^{-1} g_{-d-j}$

vérifient

$$\| D_{x'}^{\beta'} D_{\xi'}^{\alpha'} (D_{x_n}^N D_{x_n}^N)^N (D_{y_n}^M D_{y_n}^M)^M \tilde{g}_{-d-j} \|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)} =$$

$$= \mathcal{O}(\langle \xi' \rangle^{\nu-j-|\alpha'|-M-N} \kappa^{-d-\nu+2N+2M})$$

pour  $|\xi'|, \mu| \rightarrow \infty$  ; avec  $\nu = d - 1/2 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Dans le cas différentiel on obtient cette estimation avec  $\langle \xi' \rangle$  remplacé par  $\kappa$  (voir Seeley [4]). Il y a aussi des estimations de  $x_n^N D_{x_n}^N Y_n^M D_{y_n}^M \tilde{g}_{-d-j}$ .

Une conséquence du théorème 1 est que pour  $s > 0$ , la formule (1) avec  $f(\lambda) = \lambda^{-s}$  donne

$$(P_T)^{-s} = (Q_\lambda^{-s})_\Omega + G^{(-s)},$$

où  $G^{(-s)}$  n'est pas un o.g.s. de Boutet, mais quand même un "o.p.d. en  $x'$  à valeurs Hilbert-Schmidt en  $x_n > 0$ ", avec un peu de régularité. Il partage la propriété suivante avec les o.g.s. strictes :

Théorème 2 : Les valeurs propres de  $|G^{(-s)}| = (G^{(-s)})^* G^{(-s)}$  ont le comportement asymptotique

$$\lambda_j(|G^{(-s)}|) = \mathcal{O}(j^{-ds/(n-1)}) , \text{ pour } j \rightarrow \infty .$$

Comme corollaire on montre en regardant  $P_T^{-1}$  et  $(P_T^2)^{-1/2}$ , l'extension d'un résultat de [3] :

Théorème 3 : Soit  $P$  d'ordre pair, non fortement elliptique, et  $P_T$  autoadjoint; alors, pour  $t \rightarrow \infty$ ,

$$N^\pm(t; P_T) = C_P^\pm t^{n/d} + \mathcal{O}(t^{(n-(1/2)+\varepsilon)/d}), \quad \forall \varepsilon > 0 .$$

Une partie de la théorie a été rédigé dans une série de publications du Département de Mathématiques de l'Université de Copenhague.

REFERENCES

- [1] L. Boutet de Monvel, Acta Math. 126 (1971), 11-51.
- [2] G. Grubb, Comm. Part. Diff. Equ. 2 (1977), 1071-1150.
- [3] G. Grubb, C. R. Acad. Sc. Paris 287 (1978), 1017-1020.
- [4] R. Seeley, Amer. J. Math. 91 (1969), 889-920.

\*  
\* \*  
\*