

MICHEL LANGLAIS

**Sous-solutions d'un problème unilatéral dégénéré**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1978), p. 1

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1978\\_\\_\\_\\_A18\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978____A18_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SOUS-SOLUTIONS D'UN PROBLEME

UNILATERAL DEGENERE

par M. LANGLAIS

Le but de cet exposé est de définir une notion convenable de sous-solution pour les problèmes d'obstacles associés à des opérateurs différentiels dégénérés du type :

$$E = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} + \sum_{i=n+1}^N b_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i} + \alpha .$$

Soit  $Q$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . On considère l'espace

$$V = \{u \in L^2(Q), \frac{\partial u}{\partial z_i} \in L^2(Q) \quad 1 \leq i \leq n\}; V(Q) \text{ est l'adhérence de } \mathcal{D}(Q) \text{ dans}$$

$V$ . On note par  $\partial Q_e$  la partie de  $\partial Q$  qui est non caractéristique et par  $\partial Q_-$  la partie de  $\partial Q \setminus \partial Q_e$  où le champ de vecteurs  $\Lambda = \sum_{i=n+1}^N b_i \frac{\partial}{\partial z_i}$  est rentrant.  $L = E - \Lambda$ .

On se donne une fonction  $\varphi$  mesurable sur  $Q$ , un élément  $f$  dans  $V'(Q)$  et un élément  $g$  de  $L^2_e(\partial Q_-)$ , i.e.  $\int_{\partial Q_-} |\vec{\Lambda} \cdot \vec{\eta}| g^2 d\sigma < +\infty$

L'inéquation variationnelle associée à  $E$  et à l'obstacle  $\varphi$  n'admettant pas toujours de solution forte dans  $V(Q)$ , on considère le problème affaibli :

$$1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V(Q), u \leq \varphi \text{ p.p. } Q ; \\ \forall v \in V(Q), \Lambda v \in V'(Q), v|_{\partial Q_-} \in L^2_e(\partial Q_-) ; v \leq \varphi \text{ p.p. } Q : \\ ((Lu + \Lambda v - f, v - u)) + \frac{1}{2} \int_Q \operatorname{div} B \cdot (v - u)^2 dt - \frac{1}{2} \int_{\partial Q_-} |\vec{\Lambda} \cdot \vec{\eta}| (g - v)^2 d\sigma \geq 0 . \end{array} \right.$$

Sous des hypothèses très générales, ce problème possède une solution maximale notée  $\sigma(\varphi, f, g)$  qui est aussi la solution maximale de :

$$2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V(Q), u|_{\partial Q_e} \leq 0 ; u \leq \varphi \text{ p.p. } Q \\ \forall w \in H^1(Q), w|_{\partial Q \setminus \partial Q_-} = 0 ; w \geq 0 \text{ p.p. } Q \\ \int_Q [-\Lambda w - \operatorname{div} B w] u dz + \int_Q \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_i} \frac{\partial w}{\partial z_i} + \alpha u w \right] dz \leq ((f, w)) - \int_{\partial Q_-} |\vec{\Lambda} \cdot \vec{\eta}| g w d\sigma . \end{array} \right.$$

On peut alors caractériser les solutions de 2, appelées sous solutions, ce qui permet d'étudier les propriétés de  $\sigma(\varphi, f, g)$  : dépendance en fonction de l'obstacle, régularité ...