

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN-MICHEL BONY

**Propagation de singularités pour des équations  
hyperboliques non linéaires**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1978), p. 1-2

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1978\\_\\_\\_A17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978___A17_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LOCALISATION ET PROPAGATION DES SINGULARITES  
POUR LES EQUATIONS NON LINEAIRES

par J. M. BONY

On se limitera, pour fixer les idées, aux équations quasi-linéaires du second ordre :

$$(I) \quad \sum A_{ij}(x, u, \nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = B(x, u, \nabla u)$$

ou

$$(II) \quad \sum A_{ij}(x, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum A_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = B(x, u)$$

où les fonctions  $A_{ij}$ ,  $A_i$ ,  $B$  sont de classe  $C^\infty$  et réelles.

Pour chaque solution  $u$  de (I) ou (II), on définit le symbole principal  $p(x, \xi) = \sum A_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)) \xi_i \xi_j$ , la variété caractéristique  $V = \{(x, \xi) | p(x, \xi) = 0\}$  et les bicaractéristiques, courbes intégrales du champ hamiltonien  $H_p$ .

Pour  $\alpha = k + \lambda$  ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \lambda < 1$ ), on note  $C^\alpha$  l'espace des fonctions dont les dérivées d'ordre  $k$  sont holdériennes d'exposant  $\lambda$ . On dit que  $u$  est de classe  $C^\alpha$  microlocalement au voisinage de  $(x_0, \xi_0)$ , s'il existe un opérateur pseudo-différentiel classique  $K$ , d'ordre 0, dont le symbole principal est non nul en  $(x_0, \xi_0)$ , tel que  $Ku \in C^\alpha$ . On utilise des notations analogues pour les espaces de Sobolev  $H^s$ .

**Théorème 1** : Soit  $u$  une solution de I (resp. II) de classe  $C^{2+\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ,  $\alpha$  et  $2\alpha$  non entiers). Alors  $u$  est microlocalement de classe  $C^{3+2\alpha}$  [resp.  $C^{4+2\alpha}$ ] en dehors de  $V$ .

Soit  $u$  une solution de I (resp. II) de classe  $H^{n/2+2+\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ). Alors  $u$  est microlocalement de classe  $H^{n/2+3+\alpha'}$  [resp.  $H^{n/2+4+\alpha'}$ ] en dehors de  $V$ , pour  $\alpha' < 2\alpha$ .

Théorème 2 : Soit  $u$  une solution de II de classe  $H^{n/2+2+\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ), et supposons que  $u$  soit microlocalement de classe  $H^{\mu}$  au voisinage de  $(x_0, \xi_0) \in V$ , avec  $\mu < \frac{n}{2} + 3 + 2\alpha$ . Alors,  $u$  est microlocalement de classe  $H^{\mu}$  le long de la bicaractéristique issue de  $(x_0, \xi_0)$ .

Le théorème 1 repose sur des estimations a priori de type elliptique, et le théorème 2 sur une inégalité d'énergie. Les lemmes suivants permettent de contrôler les termes non linéaires, et font apparaître les limitations de régularité. Pour un ouvert conique  $\Gamma$  de  $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ , on notera  $u \in C^{\alpha}(\Gamma)$  si  $u$  est microlocalement de classe  $C^{\alpha}$  en tout point de  $\Gamma$ .

Lemme 1 : Si  $u \in C^{\alpha} \cap C^{\alpha'}(\Gamma)$ ,  $v \in C^{\beta} \cap C^{\beta'}(\Gamma)$ , alors  $uv \in C^{\gamma} \cap C^{\gamma'}(\Gamma)$  avec  $\gamma = \inf(\alpha, \beta)$  ;  $\gamma' = \inf(\alpha', \beta', \alpha + \beta)$ .

Si  $u_1, \dots, u_n \in C^{\alpha} \cap C^{\alpha'}(\Gamma)$  avec  $\alpha' \leq 2\alpha$ , et si  $F$  est  $C^{\infty}$ , on a  $F(u_1, \dots, u_n) \in C^{\alpha} \cap C^{\alpha'}(\Gamma)$ .

Lemme 2 : Si  $a \in C^{1+\alpha} \cap C^{1+\alpha'}(\Gamma)$ , si  $u \in C^{\beta} \cap C^{\beta'}(\Gamma)$ , et si  $K$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, on a

$$[K, a]u \in C^{\gamma} \cap C^{\gamma'}(\Gamma) \text{ avec } \gamma = \inf(1 + \alpha, 1 + \beta)$$

et  $\gamma' = \inf(1 + \alpha', 1 + \beta', 1 + \alpha + \beta)$ .

Les démonstrations font appel à la théorie de Littlewood-Paley et aux théorèmes de Bernstein sur l'approximation de  $F$  par des polynômes. Des lemmes analogues sont valables dans les espaces  $H^s$  ou  $W^{s,p}$ .