

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

GUY MÉTIVIER

Propriété des itérés et ellipticité

Journées Équations aux dérivées partielles (1978), p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978____A12_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIETE DES ITERES ET ELLIPTICITE

par G. METIVIER

On trouvera ci-dessous un résumé des résultats de [1].

Soit $A(x, D_x)$ un opérateur d'ordre m à coefficients analytiques sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Pour $s \geq 1$ on note $G^s(\Omega; A)$ l'espace des fonctions $u \in L^2_{loc}(\Omega)$ telles que $A^k u \in L^2_{loc}(\Omega)$ pour $k = 1, 2, \dots$, et en outre telles que pour tout $\omega \subset\subset \Omega$ il existe L vérifiant :

$$\forall k = 0, 1, \dots \quad \|A^k u\|_{L^2(\omega)} \leq L^{k+1} (k!)^{sm}$$

D'autre part on note $G^s(\Omega)$ la classe de Gevrey d'ordre s sur Ω . Rappelons tout d'abord que l'on a toujours l'inclusion $G^s(\Omega) \subset G^s(\Omega; A)$, et considérons les deux propriétés :

(i) $G^s(\Omega; A) \subset G^s(\Omega)$

(ii) A est elliptique sur Ω .

Théorème 1 : Si s est > 1 les propriétés i) et ii) sont équivalentes.

L'implication ii) \Rightarrow i) (pour $s \geq 1$) est le classique théorème des itérés elliptiques, et en fait on montre que pour $s > 1$ l'inclusion $G^s(\Omega; A) \cap C^\infty(\Omega) \subset G^s(\Omega)$ suffit à impliquer l'ellipticité de A .

La considération des opérateurs $A = \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} + \lambda \frac{d}{dx}$ montre d'autre part que l'implication i) \Rightarrow ii) est fautive en toute généralité pour $s = 1$. Il semble que pour le cas analytique ($s = 1$) il faille renforcer i) en remplaçant l'espace $G^1(\Omega; A)$ par un espace de distributions vecteurs analytiques de A .

Cependant, par des méthodes d'interpolation, on montre :

Théorème 2 : Si A est formellement autoadjoint les propriétés i) et ii) sont encore équivalentes pour $s = 1$.

Par ailleurs ces méthodes d'interpolation peuvent aussi être utilisées pour donner une condition nécessaire à la propriété des itérés jusqu'au bord ; on caractérise ainsi le type maximum de dégénérescence compatible avec cette propriété (toujours pour des opérateurs autoadjoints).

Référence

- [1] G. METIVIER : Propriété des itérés et ellipticité.
Comm. in P. D. E. (à paraître).
-