Société Mathématique de France
Astérisque 34-35 (1976) p.207-214

FORMULE DE GREEN LIÉE A L'ORDRE DE $H^1(\Omega)$.

APPLICATIONS AU PROBLÈME D'OBSTACLE.

par

Bernard HANOUZET et Jean-Luc JOLY

On se propose d'utiliser des méthodes d'ordre ; toutes les fonctions qui interviennent sont donc supposées à valeurs réelles.

Soit Ω un ouvert borné très régulier de $\mathbb{R}^n$; Γ désigne la frontière de Ω. Soit

$$a(u,v) = \int_\Omega \Big(\sum_{\substack{i \\ j=1}}^{n} a_{ij}\, D_i\, u\, D_j v + \sum_{i=1}^{n} a_i\, D_i\, uv + a_o\, uv\Big)\, dx$$

une forme intégro-différentielle continue coercive sur $H^1(\Omega)$ et soit $L(x,D)$ l'opérateur différentiel elliptique associé :

$$L(x,D) = - \sum_{\substack{i \\ j=1}}^{n} D_j\, a_{ij}\, D_i + \sum_{i=1}^{n} a_i\, D_i + a_o\, I.$$

On donne $\psi \in H^1(\Omega)$ et on définit $\sigma(\psi)$ comme la solution de l'inéquation variationnelle (problème d'obstacle)

(1) $\sigma(\psi) \in H^1(\Omega)$, $\sigma(\psi) \leq \psi$;

(2) $\forall\, v \in H^1(\Omega)$, $v \leq \psi$, $a(\sigma(\psi), \sigma(\psi) - v) \leq 0$.

On se propose de montrer que σ vérifie les deux inégalités :

(3) $0 \geq L\sigma \geq (L\,\psi) \wedge 0$

(4) $0 \geq \dfrac{\partial\sigma}{\partial\nu_a} \geq \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu_a} \wedge 0$

où $\dfrac{\partial}{\partial\nu_a}$ désigne la trace sur Γ de la dérivée conormale par rapport à a.

L'inégalité (3) apparait semble-t-il pour la première fois en théorie axiomatique du potentiel [6] et pour les potentiels newtoniens [5]. Elle est vérifiée ensuite indépendamment et par des méthodes différentes pour le cône des potentiels d'un espace de Dirichlet [1] et pour les solutions de certaines inéquations aux dérivées partielles [7], [9]. L'inégalité (4) est déjà indiquée dans [8]. La forme et la méthode de démonstration que nous donnons ici semblent nouvelles.

Une première difficulté est de donner un sens dans (4) à la trace sur Γ de la dérivée co-normale de σ. En utilisant la structure d'ordre de $H^1(\Omega)$, on obtient une formule de Green qui permet de définir cette trace et d'interpréter les problèmes unilatéraux tels que (1) (2) sans hypothèses de régularité sur ψ.

Les inégalités (3) (4) apparaissent comme une interprétation, via la formule de Green et un théorème de structure du dual d'ordre de $H^1(\Omega)$, du principe de la réduite dont on trouve dans [1] une démonstration dans le cadre des espaces de Dirichlet.

Nous donnons enfin une application des inégalités (3) (4) à l'obtention de la régularité pour la solution d'une inéquation quasi-variationnelle qui intervient dans des problèmes de contrôle impulsionnel [2].

Nous en restons ici à l'étude du problème de Neumann. La méthode et les résultats se généralisent au cas du problème mixte. Ces résultats sont résumés dans deux notes [3], [4] et sont l'objet de deux articles à paraître dans lesquels on trouvera le détail des démonstrations, d'autres applications, et une bibliographie plus complète.

I. <u>FORMULE DE GREEN.</u>

A la forme a on associe les deux opérateurs :

$L : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$, $A : H^1(\Omega) \longrightarrow (H^1(\Omega))'$

qui sont définis respectivement par :

$\forall\, u \in H^1(\Omega)$, $\forall\, v \in H^1_0(\Omega)$, $< Lu,v > = a(u,v)$

$\forall\, u \in H^1(\Omega)$, $\forall\, v \in H^1(\Omega)$, $<< Au,v >> = a(u,v)$

où $< , >$ et $<<,>>$ désignent la dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H^1_0(\Omega)$ d'une part, $(H^1(\Omega))'$ et $H^1(\Omega)$ d'autre part. Le problème est d'obtenir une formule de Green pour comparer "$Au - Lu$" à la dérivée conormale de u. Désignons par ρ la transposée de l'injection de $H^1_0(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. On a : $\rho\, Au = Lu$; on va donc comparer Au à ΠLu où Π est un prolongement convenable de Lu à $H^1(\Omega)$. On obtiendra :

$$V\ v\ \ H\ (\Omega),\ <<Au - \Pi Lu, v>> = <\gamma_a u, \gamma_0 v>_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

où γ_0 est l'application trace : $H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, γ_a est un prolongement à un sous-espace de $H^1(\Omega)$ de la trace de la dérivée conormale. C'est pour l'obtention du prolongement Π que l'ordre intervient : si Au est positive sur $H^1(\Omega)$, alors Lu est positive sur $H^1_o(\Omega)$; Au est donc un prolongement positif de Lu, on prend pour ΠLu le prolongement minimum.

1. On munit $L^2(\Omega)$ de l'ordre naturel ; on note $u \wedge v$ et $u \vee v$ les bornes inférieure et supérieure de deux éléments u et v. Munis de l'ordre induit par $L^2(\Omega)$, $H^1_o(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ sont des sous-espaces coréticulés de $L^2(\Omega)$. De même, $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un sous-espace coréticulé de $L^2(\Gamma)$. L'application trace γ_o est un homomorphisme de Riesz de $H^1(\Omega)$ sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. On en déduit que $H^1_o(\Omega)$ est un sous-espace isolé de $H^1(\Omega)$. Ces espaces sont engendrés par leur cône positif. Il n'en est pas de même pour leurs duals. On note respectivement $(H^1(\Omega))^*$, $(H^1_o(\Omega))^*$, $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^*$ les duals d'ordre de $H^1(\Omega)$, $H^1_o(\Omega)$, $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Ce sont des espaces de Riesz complètement réticulés. Comme $H^1_o(\Omega)$ est un sous-espace isolé de $H^1(\Omega)$ on obtient facilement que :

PROPOSITION I.1. <u>La restriction</u> ρ <u>est un homomorphisme de Riesz de</u> $(H^1(\Omega))^*$ <u>dans</u> $(H^1_o(\Omega))^*$.

Cependant, ρ n'est pas surjective ; on introduit donc l'espace :

$$\mathbb{H} = \rho\,(H^1(\Omega))^*$$

La proposition I.1. montre que $\mathbb{H}$ est un espace de Riesz. Le cône $\mathbb{H}^+$ des éléments positifs de $\mathbb{H}$ est caractérisé par :

PROPOSITION I.2. <u>Soit</u> f <u>une forme positive sur</u> $H^1_o(\Omega)$. <u>Pour que</u> f <u>se prolonge en une forme linéaire positive sur</u> $H^1(\Omega)$ <u>il faut et il suffit que</u> :

$$(\underline{\text{I.1}}) \qquad \forall\, u \in (H^1(\Omega))^+, \quad \sup_{\substack{v \in H^1_o(\Omega) \\ o \le v \le u}} \langle f,v \rangle < \infty.$$

<u>La forme</u> f <u>admet alors un prolongement positif continu minimum</u> Πf <u>qui est défini par</u> :

$$(\underline{\text{I.2}}) \qquad \forall\, u \in (H^1(\Omega))^+, \quad \langle\langle \Pi f,u \rangle\rangle = \sup_{\substack{v \in H^1_o(\Omega) \\ o \le v \le u}} \langle f,v \rangle$$

On vérifie facilement que l'application

$$\Pi : \mathbb{H}^+ \longrightarrow (H^1(\Omega))^*$$

est positivement homogène et additive. On peut donc définir un prolongement linéaire et positif de Π à $\mathbb{H}$, noté encore Π en posant :

$$\forall\, f \in \mathbb{H}\ ,\ \Pi f = \Pi f^+ - \Pi f^- .$$

Ce prolongement vérifie alors :

PROPOSITION I.3. <u>L'application</u> $\Pi : \mathbb{H} \longrightarrow (H^1(\Omega))^*$ <u>est un homomorphisme de Riesz qui est l'inverse à droite minimum de l'homomorphisme</u> ρ .

La formule de définition (I.2) de Π n'est pas toujours d'un emploi aisé, nous avons une propriété d'approximation plus commode :

PROPOSITION I.4. Soit K_m la suite croissante de compacts :

$$K_m = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x,\Gamma) \geq \frac{1}{m}\}$$

Soit α_m une suite de multiplicateurs de $H^1(\Omega)$ vérifiant :

$$0 \leq \alpha_m \leq 1 \; ; \; \alpha_m|_{K_m} = 1 \; ; \; \forall\, u \in H^1(\Omega),\; \alpha_m u \in H^1_o(\Omega)$$

Alors, pour tout f de $\mathbb{H}$ et pour tout u de $H^1(\Omega)$, on a :

$$(I.3) \qquad \langle\langle \Pi f, u \rangle\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle f, \alpha_m u \rangle$$

Réciproquement, si f appartient à $(H^{-1}(\Omega))^+$ et si la suite $\langle f,\alpha_m u\rangle$ a une limite pour tout u de $H^1(\Omega)$, alors f appartient à $\mathbb{H}^+$ et on a (I.3)

2. Le théorème de structure suivant donne une décomposition de $(H^1(\Omega))^*$ en une somme directe ordonnée :

THÉORÈME 1. $\Pi\mathbb{H}$ est une bande de $(H^1(\Omega))^*$. On a la décomposition en somme directe ordonnée :

$$(H^1(\Omega))^* = \Pi\,\mathbb{H} \oplus (\Pi\,\mathbb{H})^{\perp} .$$

$(\Pi\mathbb{H})^{\perp}$ - bande des éléments étrangers à $\Pi\,\mathbb{H}$ - est isomorphe en tant qu'espace de Riesz à $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^*$.

Pour montrer ce théorème, on vérifie en particulier que si f appartient à $\mathbb{H}$ et si G appartient à $(H^1(\Omega))^*$ alors, les deux formes Πf et $G - \Pi\rho G$ sont étrangères. Pour démontrer cette propriété, on peut se ramener au cas où f et G sont positives, et on doit alors montrer que

$$\forall\, u \in (H^1(\Omega))^+, \quad \inf_{\substack{v \in (H^1(\Omega))^+ \\ w \in (H^1(\Omega))^+ \\ v+w=u}} (\langle\langle \Pi f, v \rangle\rangle + \langle\langle G - \Pi\rho G, w \rangle\rangle) = 0$$

et cette dernière relation résulte facilement de la proposition I.4.

Une fois montré que $\Pi\,\mathbb{H}$ est une bande, la décomposition découle du théorème de Riesz. On obtient donc que tout $F \in (H^1(\Omega))^*$ se décompose de manière unique sur les deux bandes étrangères en :

$$F = \Pi\rho F + (F - \Pi\rho F)$$

Comme γ_o est un homomorphisme de Riesz de $H^1(\Omega)$ sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dont le noyau est $H^1_o(\Omega)$, la transposée $t\gamma_o$ est un isomorphisme de $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^*$ sur le sous-espace de $(H^1(\Omega))^*$ composé des formes qui s'annulent sur $H^1_o(\Omega)$. On a donc :

$$(I.4) \qquad (H^1(\Omega))^* = \Pi\,\mathbb{H} \oplus t\gamma_o\,(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) .$$

3. On introduit le sous-espace de $H^1(\Omega)$:

$$H^1_{L,\mathbb{H}} = \{u \in H^1(\Omega) \ ; \ Lu \in \mathbb{H}\}$$

que l'on munit de la norme :

$$\|u\|_{H^1_{L,\mathbb{H}}} = \{\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|\Pi Lu\|_{(H^1(\Omega))'}\} .$$

On vérifie facilement que l'espace $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1_{L,\mathbb{H}}$.

DÉFINITION. - Pour tout u appartenant à $H^1_{L,\mathbb{H}}$ on appelle trace sur Γ de la dérivée conormale de u par rapport à a l'élément $\gamma_a u$ de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ qui est défini par :

(I.5) $$t\, \gamma_o\, \gamma_a\, u = Au - \Pi\, Lu .$$

Comme $Au - \Pi Lu$ est nulle sur $H^1_0(\Omega)$, (I.5) définit bien $\gamma_a u$ sans ambiguité. On vérifie aisément que l'application $\gamma_a : H^1_{L,\mathbb{H}} \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est linéaire et continue.

Remarquons que lorsque Au appartient à $(H^1(\Omega))^*$ alors $\gamma_a u$ appartient à $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^*$ et $t\gamma_o\, \gamma_a u$ est la composante de Au sur $(\Pi\mathbb{H})^\perp$.

Notons $\frac{\partial}{\partial\nu_a}$ l'application trace sur Γ de la dérivée conormale par rapport à a définie pour une fonction u régulière par :

(I.6) $$\frac{\partial u}{\partial\nu_a} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, D_i\, u\right)\Big|_\Gamma \cos\Theta_j$$

où Θ_j désigne l'angle de la normale extérieure à Γ avec la $j^{\text{ème}}$ vecteur de base. La définition est justifiée par le résultat suivant :

THÉORÈME 2. - Formule de Green.

L'application $\frac{\partial}{\partial\nu_a} : \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(\Gamma)$ définie par (I.6) se prolonge par continuité en l'application $\gamma_a : H^1_{L,\mathbb{H}} \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ définie par (I.5) et on a la formule de Green :

(I.7) $$\begin{gathered}\forall u \in H^1_{L,\mathbb{H}}\ ,\ \forall\, v \in H^1(\Omega)\\ a(u,v) = \langle\langle \Pi\, Lu, v \rangle\rangle + \langle \gamma_a\, u, \gamma_o v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\end{gathered}$$

Remarque. - Pour $u \in H^1(\Omega)$, on sait que les "dérivées tangentielles" de u ont une trace dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. La donnée de $\gamma_a u$ permet alors de définir dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ une trace $\gamma_{1,a} u$ de la dérivée normale extérieure de u. Cette trace qui dépend a priori de a en est en fait indépendante car elle est la limite dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ des quotients différentiels qui définissent la dérivée normale pour une fonction régulière. Cette propriété se démontre localement après transport dans $\mathbb{R}^n_+$. Plus précisément, soit Θ' un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$, $\Theta = \Theta' \times]o,\varepsilon[$, $\underline{\Theta} = \Theta' \times [o,\varepsilon[$. Si $u \in H^1_{L,\mathbb{H}}(\Theta)$ avec supp u compact $\subset \Theta$ alors :

$$\frac{u(x',o) - u(x',h)}{h} \xrightarrow[h\to o]{} \gamma_{1,a} u.$$

II. APPLICATIONS.

1. En utilisant le théorème 2, on interprète immédiatement le problème de Neumann.

THÉORÈME 3. - Soit $f \in (H^1(\Omega))'$ avec $\rho f \in \textcircled{H}$. La solution $u \in H^1(\Omega)$ de :

$$\forall\, v \in H^1(\Omega),\ a(u,v) = \ll f,v \gg$$

est caractérisée par :

$$\begin{cases} Lu = \rho f \\ \gamma_a u = t\gamma_0^{-1}\,(f-\Pi\,\rho f). \end{cases}$$

2. En appliquant le théorème 1 à l'inégalité $Au \leq f$, on obtient une interprétation des problèmes unilatéraux généraux :

THÉORÈME 4. - Soit $f \in (H^1(\Omega))^*$ et Q un ensemble convexe fermé non vide de $H^1(\Omega)$ tel que $Q - (H^1(\Omega))^+ \subset Q$. La solution du problème unilatéral :

$$u \in Q$$

$$\forall\, v \in Q,\ a(u,u-v) \leq \ll f,u-v \gg$$

admet une trace $\gamma_a u$ et vérifie :

$$Lu \leq \rho\, f$$

$$\gamma_a u \leq t\gamma_0^{-1}\,(f-\Pi\,\rho\, f)$$

En particulier pour le problème d'obstacle, on a :

THÉORÈME 5. - Soient $f \in (H^1(\Omega))^*$ et $\psi \in H^1(\Omega)$. La solution de l'inéquation variationnelle :

$$\text{(II.1)}\quad \begin{cases} u \in H^1(\Omega),\ u \leq \psi, \\ \forall\, v \in H^1(\Omega),\ v \leq \psi,\ a(u,u-v) \leq \ll f,u-v \gg \end{cases}$$

est caractérisée par :

$$\begin{cases} u \in H^1_{L,\,H}, \\ u \leq \psi,\ Lu \leq \rho f,\ \ll \Pi\,(Lu - \rho f),\ u - \psi \gg = o \\ \gamma_a u \leq t\gamma_0^{-1}(f-\Pi\,\rho\, f),\ \ll \gamma_a u - t\gamma_0^{-1}(f-\Pi\,\rho\, f),\ \gamma_0(u-\psi) \gg_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0 \end{cases}$$

On applique ici le théorème 4 d'une part, et d'autre part on décompose l'égalité :

$$\ll Au - f,\ \ u - \psi \gg = 0$$

grâce au théorème 1.

3. Nous sommes maintenant en mesure de donner un sens aux estimations (3) (4).

THÉORÈME 6. - Soient $f \in (H^1(\Omega))^*$ et $\psi \in H^1(\Omega)$ avec $A\,\psi \in (H^1(\Omega))^*$. La solution de (II.1) vérifie alors :

$$\text{(II.2)}\quad \begin{cases} Lu \geq \rho\, f \wedge L\,\psi \\ \gamma_a u \geq t\gamma_0^{-1}\,(f-\Pi\,\rho\, f) \wedge \gamma_a\,\psi \end{cases}$$

(II.2) découle via le théorème 1 de l'inégalité

(II.3) $\qquad Au \geq f \wedge A\,\psi$

4. On applique le théorème précédent à l'obtention de la régularité pour une inéquation quasi-variationnelle.

Soit $M : L^\infty(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$ défini par :

$$\forall\, x \in \Omega \quad [M(\varphi)](x) = 1 + \inf_{\substack{\xi \geq 0 \\ x+\xi \in \Omega}} \varphi(x+\xi)$$

et on pose, pour $\varphi \in L^\infty(\Omega)$:

$$Q(\varphi) = \{u \in H^1(\Omega) \ ; \ u \leq M(\varphi)\}$$

On considère l'inéquation quasi-variationnelle :

$$\text{(II.4)} \quad \begin{cases} u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \ ; \\ u \in Q(u) \ ; \\ \forall\, v \in Q(u),\ a(u,u-v) \leq \langle\langle f,u-v \rangle\rangle \end{cases}$$

pour laquelle on a déjà des résultats d'existence et d'unicité dans $H^1(\Omega)$.

On obtient un résultat de régularité sous les hypothèses supplémentaires suivantes :

$$\text{(II.5)} \quad \begin{cases} \Omega =]o,1[^2 \\ a(u,v) = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1,2} D_i u\, D_i v + \sum_{i=1,2} a_i\, D_i u.v + a_o u\, v\Big)\, dx \\ \text{où } a_o, a_i \text{ sont des constantes réelles, } a_o > o \\ f \in L^\infty(\Omega),\ f \geq o \end{cases}$$

THÉORÈME 7. - <u>Sous les hypothèses</u> <u>(II.5)</u> <u>la solution de l'I.Q.V.</u> <u>(II.4)</u> <u>appartient</u> <u>à</u> $W^{2,p}(\Omega)$, <u>pour tout</u> $p \in]1,+\infty[$.

<u>Idée de la démonstration</u>. -

On désigne par S l'opérateur qui est défini sur l'ensemble :

$$\{u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \ ; \ Q(u) \neq \emptyset \}$$

de la façon suivante :

$$S(u) \in Q(u)$$

$$\forall\, v \in Q(u),\ a(S(u), S(u)-v) \leq \langle\langle f, S(u) - v \rangle\rangle .$$

Partant de $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ solution du problème de Neumann

$$\forall\, v \in H^1(\Omega),\ a(\bar{u},v) = \langle\langle f,v \rangle\rangle$$

on construit la suite des itérés $S^n(\bar{u})$. On sait que cette suite converge en décroissant, faiblement dans $H^1(\Omega)$, vers la solution de (II.4).

On vérifie, en particulier grâce au théorème 6, que l'ensemble C

$$C = \{u \in H^1(\Omega) \ ; \ f \geq Lu \geq o,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0 \}$$

est stable par S. Comme C est un borné de $W^{2,p}(\Omega)$ on obtient le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANCONA A. - J. Math. pures et appl., 54 (1975), p. 75-124.

[2] BENSOUSSAN A. et LIONS J.L. - C.R. Acad. Sc. Paris, 276, série A (1973) p. 1189.

[3] HANOUZET B. et JOLY J.L. - C.R. Acad. Sc. Paris, 281, série A (1975), p. 373.

[4] HANOUZET B. et JOLY J.L. - C.R. Acad. Sc. Paris,281 , série A (1975), p.

[5] LEWY H. et STAMPACCHIA G. - J. Analyse Math., 23 (1970), p. 227-236.

[6] MOKOBODZKI G. et SIBONI D. - C.R. Acad. Sc. Paris, t. 266, série A (1968)p. 215.

[7] MOSCO U. et TROIANIELLO G.M. - Bolletino U.M.I. (4), 8 (1973), p. 57-67.

[8] MURTHY M.K.V. et STAMPACCHIA G. - Israël J. Math., 13 (1972), p. 188-223.

[9] TROIANIELLO G.M. - Rend. Acad. Sc. Fis. Mat. Napoli (1975).

Bernard HANOUZET et Jean-Luc JOLY
Maîtres de Conférences
U.E.R de Mathématiques et Informatiques
et laboratoire associé au CNRS n°226
Université de Bordeaux 1
351, cours de la libération
33 405 - TALENCE