Société Mathématique de France
Astérisque 34-35 (1976) p.27-41

PROBLÈMES de CAUCHY PSEUDO-DIFFÉRENTIELS ANALYTIQUES

par M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC

Il s'agit d'une extension des théorèmes classiques de Cauchy-Kovalewsky et Holmgren pour des problèmes de Cauchy pseudo-différentiels en les variables d'espace et différentiels en temps.

Soient Γ une variété analytique réelle compacte de dimension n, $T > 0$, P une fonction C^∞ sur $[-T,T]$ à valeurs dans les opérateurs pseudo-différentiels analytiques d'ordre 1 sur Γ; onte $A(\Gamma)$ l'espace des fonctions analytiques sur Γ; on a :

<u>Théorème 1.</u> Pour tous $u_o \in A(\Gamma)$ et $f \in C^o([-T,T], A(\Gamma))$, il existe $\varepsilon > 0$ et une unique fonction $u \in C^1([-\varepsilon,\varepsilon], A(\Gamma)$ tels que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - P(t,x,D_x)\, u(t,x) = f(t,x) \quad \text{pour } |t| < \varepsilon \\ u(o,x) = u_o(x). \end{cases}$$

De plus, pour $f \in C^\infty([-T,T], A(\Gamma))$ (resp. analytique en t), u est dans $C^\infty([-\varepsilon,\varepsilon], A(\Gamma))$ (resp. analytique sur $[-\varepsilon,\varepsilon] \times \Gamma$).

Théorème 2. Soit u une distribution sur $]-T,T[\times \Gamma$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - Pu = 0 \quad \text{pour } |t| < T \\ u = 0 \quad \text{pour } t < 0, \end{cases}$$

alors $u = 0$ dans $]-T,T[\times \Gamma$.

La méthode consiste essentiellement à trouver une chaîne décroissante $(E_s)_{s>o}$ d'espaces de Banach telle que :

i) $A(\Gamma) = \bigcup_{s>o} E_s$,

ii) Tout opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 1 est singulier de type 1 dans cette chaîne,

et à utiliser alors les résultats sur le problème de Cauchy abstrait dans une chaîne d'espaces (cf [10] [13]...). Pour certaines démonstrations, on renvoie à [2].

On traite ainsi plus généralement des systèmes linéaires du 1^er^ ordre ou d'ordre supérieur, des problèmes de Cauchy caractéristiques du type de Fuchs (cf [1] pour le résultat abstrait et le cas différentiel). Le résultat de [9] et l'utilisation d'une chaîne d'algèbres de Banach $(E_s)_{s>o}$ permettent de résoudre des problèmes non linéaires, tels que l'existence et l'unicité d'une solution analytique pour le problème d'Euler (cf [3] pour une étude détaillée).

Certains problèmes de Cauchy non locaux ont été résolus dans [11] [12] et leurs références, mais sans résultats généraux.

I - Chaîne d'espaces de Banach de fonctions analytiques.

Soient $X_1, \ldots, X_r$ des champs de vecteurs réels analytiques sur Γ et qui engendrent l'espace tangent en chaque point de Γ ; l'existence de tels champs résulte du plongement analytique de Γ dans un espace $\mathbb{R}^r$ (cf [8]).

Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ avec $\alpha_j \in \{1, \ldots, r\}$, on note $|\alpha| = l$ et $X^\alpha = X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} \ldots X_{\alpha_l}$; on note J l'ensemble de tels indices α.

On choisit sur Γ une mesure de Lebesgue μ à densité analytique ; pour $s > o$, on note

$$E_s = \left\{ u \in C^\infty(\Gamma) \; ; \; \|u\|_s = \sup_{\alpha \in J} \frac{\|X^\alpha u\|_{L^2(\Gamma)} s^{|\alpha|}}{|\alpha|!} < \infty \right\} .$$

Les espaces E_s, munis de la norme $\| \ \|_s$ constituent évidemment une chaîne décroissante d'espaces de Banach; on a le résultat :

<u>Proposition 1</u>. L'espace $A(\Gamma) = \bigcup_{s>o} E_s$.

D'abord, pour $u \in E_s$ on a

$$(1) \qquad \left\| \left(\sum_{i=1}^{r} X_i^2 \right)^k u \right\|_{L^2(\Gamma)} \leq r^k \|u\|_s \, s^{-2k} \, 2k! \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}$$

et donc u est analytique d'après [6].

Inversement, soit $u \in A(\Gamma)$; en utilisant des cartes locales, on montre que u est dans un espace E_s grâce au lemme suivant :

<u>Lemme 1.</u> Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $u \in A(\Omega)$, $Y_1, \ldots, Y_r$ des opérateurs différentiels d'ordre ≤ 1 à coefficients analytiques sur Ω ; pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C > 0$ tel que

$$\| Y^\alpha u \|_{L^2(K)} \leq C^{|\alpha|+1} |\alpha|! \quad \text{pour tout } \alpha \in J.$$

La preuve du lemme est un simple calcul consistant à montrer, par récurrence sur α, qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que, pour $\alpha \in J$ et $\beta \in \mathbb{N}^n$,

$$(2) \qquad \| D^\beta Y^\alpha u \|_{L^2(K)} \leq C_1^{|\alpha|+1} C_2^{|\beta|} (|\alpha| + |\beta|)!$$

(D^β désigne $D_1^{\beta 1} \ldots D_n^{\beta n}$ et $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$).

II - Les opérateurs pseudo-différentiels analytiques sont singuliers dans la chaîne $(E_s)_{s>o}$.

On montre le résultat :

Proposition 2. Soit P un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre d sur Γ ($d \in \mathbb{N}$); alors P est un opérateur singulier de type d dans la chaîne $(E_s)_{s>o}$, c'est-à-dire qu'il existe $s_o > o$ et $C > o$ tels que pour $o < s' < s \leq s_o$, $P \in \mathcal{L}(E_s, E_{s'})$ et

$$\| P \|_{\mathcal{L}(E_s, E_{s'})} \leq \frac{C}{(s - s')^d} .$$

Démonstration.

1°Réduction au cas $d = 0$. Admettons provisoirement la proposition 2 dans le cas $d = 0$. La multiplication par une fonction analytique est un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 0, donc borné dans la chaîne $(E_s)_{o<s\leq s_1}$ pour s_1 convenable. Chaque X_j est un opérateur singulier de type 1 dans la chaîne $(E_s)_{s>o}$; en effet, pour $o<s'<s$, $u \in E_s$ et $\alpha \in J$, on a :

$$\|X^\alpha X_j u\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|u\|_s \; s^{-|\alpha|-1} (|\alpha| + 1) \; !$$

et donc

$$\|X_j u\|_{s'} \leq \|u\|_s \sup_{\alpha \in J} s^{-|\alpha|-1} s'^{|\alpha|} (|\alpha| + 1)$$

$$\|X_j u\|_{s'} \leq \frac{e^{-1}}{s - s'} \|u\|_s .$$

Le système $X_1, \dots, X_r$ étant elliptique, on en déduit que tout opérateur différentiel d'ordre d à coefficients analytiques sur Γ est singulier de type d dans $(E_s)_{s>0}$.

Il existe des opérateurs pseudo-différentiels analytiques Q et R d'ordre -2 et -1 respectivement, tels que :

(3) $$\left(\sum_{j=1}^{r} X_j^2\right) Q = I + R \quad .$$

Si P est d'ordre 1, les opérateurs $P_j = X_j Q P$ sont d'ordre 0, donc bornés dans la chaîne $(E_s)_{s>0}$; il en résulte qu'alors

(4) $$P = \sum_{j=1}^{r} X_j P_j - R P$$

est singulier de type 1 dans $(E_s)_{s>0}$.

Si P est d'ordre $d > 1$ on peut encore terminer la démonstration en utilisant une parametrix de l'opérateur elliptique $\sum_{j=1}^{r} X_j^{2d}$.

2^{o} <u>Démonstration de la proposition 2 pour $d = 0$.</u> Soit donc P un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 0 sur Γ.

Soit $u \in E_s$; on veut estimer $X^{\alpha} Pu$ pour $\alpha \in J$; pour α, β dans J, on note $\beta \leq \alpha$ lorsque β est une sous-suite de α ; on a

(5) $$X^{\alpha} P u = \sum_{\beta\leq\alpha} K^{\alpha}_{\beta} X^{\beta} u \quad {}^{(1)} ,$$

où K^{α}_{β} est un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 0 de la forme

(6) $$K^{\alpha}_{\beta} = [\, X_{\gamma_1} , [\, X_{\gamma_2} , \ldots [X_{\gamma_l} , P] \ldots]\,] \quad \text{pour} \quad l = |\alpha| - |\beta| > 0$$

et $K^{\alpha}_{\alpha} = P$.

Un simple calcul de majorations montre que la proposition 2 pour $d = 0$ résulte alors du lemme suivant :

<u>Lemme 2.</u> Soit P un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 0 sur Γ . Il existe $M > o$ tel que l'on ait pour tout $\gamma \in J$

$$\| K_{\gamma} \|_{\mathcal{L}(L^2(\Gamma)\, ,\, L^2(\Gamma))} \leq M^{|\gamma|+1} \, |\gamma| \, !$$

où $$K_{\gamma} = [\, X_{\gamma_1} , [\, X_{\gamma_2} , \ldots [\, X_{\gamma_{|\gamma|}} , P] \ldots]\,] \; .$$

Pour démontrer ce lemme, on doit décrire plus précisément les opérateurs pseudo-différentiels analytiques sur Γ (cf [4] [5] [7]) :

a) Le noyau $\tilde{p}$ de P est analytique sur $\Gamma \times \Gamma$ sauf sur la diagonale.

---

(1) Dans cette somme, chaque terme est répété le nombre de fois que β peut être extrait de α.

b) Localement dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, le noyau est de la forme

(7) $$p(x,y) = \sum_{k=o}^{\infty} p_k(x,x-y) + r(x)\, \delta_{(x-y)} + q(x,y)$$

où : r, q sont analytiques, chaque $p_k(x,z)$ est pseudo-homogène de degré $-n+k$ en z , $\int_{S_{n-1}} p_o(x,z)dz = 0$ (S_{n-1} désignant la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$) et, pour tout compact $K \subset U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que chaque p_k est analytique dans le domaine

(8) $$\{(x,z) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n,\ \text{dist}\ (x,K) < \varepsilon \ \text{ et } \ |\text{Im} z| < \varepsilon |\text{Re} z| \leq \varepsilon^2\}$$

et la série converge uniformément dans ce domaine.

Soient $\widetilde{\Omega}_1 \subset \widetilde{\Omega}$ des ouverts de Γ et $v \in L^2(\Gamma)$; pour obtenir le lemme 2 il suffit de montrer qu'il existe une constante $M_1 > 0$ telle que :

(9) $$\| K_\gamma v \|_{L^2(\widetilde{\Omega}_1)} \leq M_1^{|\gamma|+1} \ |\gamma| ! \quad \text{pour tout} \quad \gamma \in J .$$

Soit $\varphi \in C_o^\infty(\widetilde{\Omega}_1)$ valant 1 sur un voisinage de $\widetilde{\Omega}_1$; on note ω le support de $1-\varphi$; on a :

(10) $$\| K_\gamma (1-\varphi)\, v \|_{L^2(\widetilde{\Omega}_1)} \leq \| v \|_{L^2(\Gamma)} \left(\int_{\widetilde{\Omega}_1 \times \omega} |\widetilde{k}_\gamma\ (x,y)|^2 \, d\mu(x)\ d\mu(y) \right)^{1/2}$$

où $\widetilde{k}_\gamma$ est le noyau de K_γ et est donné par

$$(11)\begin{cases} \tilde{k}_\gamma(x,y) = \left(X_{\gamma_1}(x) + X^*_{\gamma_1}(y)\right)\cdots\left(X_{\gamma_{|\gamma|}}(x) + X^*_{\gamma_{|\gamma|}}(y)\right)\tilde{p}\,(x,y) \\ \\ \text{avec } \int_\Gamma X_j\, u.v\, d\mu = -\int_\Gamma u.X^*_j v \quad d\mu\ . \end{cases}$$

Le lemme 1 (avec n remplacé par $2n$), (10)(11) et l'analyticité de $\tilde{p}$ sur $\tilde{\Omega}_1 \times \omega$ impliquent l'existence de $M_2 > 0$ telle que

$$\|K_\gamma (1-\varphi)\, v\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)} \leq \|v\|_{L^2(\Gamma)}\, M_2^{|\gamma|+1}\, |\gamma|\ ! \text{ pour tout } \gamma \in J.$$

Pour démontrer (9) il suffit donc d'obtenir de bonnes estimations de $K_\gamma\, \varphi\, v$ et, par cartes locales, le problème peut s'étudier dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ où la description du noyau de P est donnée par (7) ; on peut supposer que U contient la boule de centre 0 et rayon 1 et prendre $K = \{0\}$; pour $\varepsilon > 0$ correspondant à ce K, on note $\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n\ ;\ |x| < \varepsilon/8 \}$; il suffit alors de montrer le lemme :

<u>Lemme 3 :</u> Il existe $M_3 > 0$ tel que l'on ait, pour tout $\gamma \in J$ et pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\left(\int_\Omega \left| \int_\Omega k_\gamma(x,y)\quad u(y)\ dy \right|^2 dx\right)^{1/2} \leq M_3^{|\gamma|+1}\, |\gamma|\ !\ \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

où k_γ désigne dans la carte locale le noyau de l'opérateur K_γ.

La fonction k_γ est de la forme

$$(12)\quad k_\gamma(x,y) = (Y_{\gamma_1}(x) + Y^*_{\gamma_1}(y))\dots\big(Y_{\gamma_{|\gamma|}}(x) + Y^*_{\gamma_{|\gamma|}}(y)\big)\, p(x,y)$$

où Y_j est le champ de vecteur associé à X_j dans U et Y_j^* est défini par

$$\int_U Y_j\, u.v\, dx = -\int u.Y_j^*\, v\;\; dx \qquad \text{pour } u,v \text{ dans } C_o^\infty(U)\,.$$

La contribution de q et $r(x)\delta_{(x-y)}$ (dans 7) à k_γ donné par (12) fournit, grâce au lemme 1, une estimation conforme à celle annoncée dans le lemme 3; on peut donc supposer

$p(x,y) = \sum_{k=o}^{\infty} p_k(x,\ x-y)$ et alors

$k_\gamma(x,y) = B_{\gamma_1}\dots B_{\gamma_{|\gamma|}}\left(\sum_{k=o}^{\infty} p_k(x,z)\right)$, où $z = x - y$ et

$B_j = B_j(x,z,D_x,D_z)$ est, pour $1 \leq j \leq r$, un opérateur du premier ordre en D_x et $z_k\, D_{z_l}$ pour $1 \leq k,\ l \leq n$, à coefficients analytiques.

Une démonstration assez technique, pour laquelle nous renvoyons à [2] conduit à l'existence d'une constante M_4 telle que l'on ait pour $\gamma \in J$

$$\int_{|z|<\frac{\varepsilon}{4}} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \left|\sum_{k=1}^{\infty} B^\gamma\, p_k(x,z)\right| dz \leq M_4^{|\gamma|+1}\, |\gamma|\,!$$

ce qui ramène la démonstration du lemme 3 à l'étude de la contribution de p_o; pour celle-là on écrit

$$B_i(x,\ z,\ D_x,\ D_z) = \mathfrak{B}_i(x,\ D_x,\ zD_z) + \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{B}_{i,j}(x,\ z,\ D_x,\ D_z)z_j$$

où: $\mathfrak{B}_i$ est un opérateur du premier ordre en D_x et $z_k D_{z_l}$ pour $1 \leq k,l \leq n$ à coefficients analytiques en x et indépendants de z; $\mathfrak{B}_{i,j}$ est un opérateur du premier ordre en $D_x, z_k D_{z_l}$ pour $1 \leq k,l \leq n$ à coefficients analytiques.

On a alors :

$$B^\gamma\ p_o = \mathfrak{B}_{\gamma_1} \ldots \mathfrak{B}_{\gamma_{|\gamma|}}\ p_o + \mathfrak{R}_\gamma\ p_o = \mathfrak{B}^\gamma\ p_o + \mathfrak{R}_\gamma\ p_o$$

et on montre que la contribution de $\mathfrak{R}_\gamma\ p_o$ se majore comme précédemment celle de $\sum_{k=1}^{\infty} B^\gamma\ p_k$(cf[2]).

Pour $\mathfrak{B}^\gamma p_o$ on obtient aisément le résultat :

<u>Lemme 4.</u> Pour tout $\gamma \in J$, $\mathfrak{B}^\gamma\ p_o(x,z)$ est une fonction analytique dans $\overline{\Omega} \times (\mathbb{R}^n - \{0\}$, homogène de degré $-n$ en z et vérifiant :

$$\int_{S_{n-1}} \mathfrak{B}^\gamma\ p_o(x,z)\ dz = 0 \text{ pour tout } x \in \overline{\Omega}.$$

De plus, il existe $M_5 > 0$ tel que l'on ait pour tout $\gamma \in J$ et α,β dans $\mathbb{N}^n$,

$$\sup_{\substack{x \in \overline{\Omega} \\ z \in S_{n-1}}} \left| D_x^\alpha\ D_z^\beta\ \mathfrak{B}^\gamma\ \ p_o(x,z) \right| \leq M_5^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+1}(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)\ !$$

ce qui, grâce aux résultats bien connus sur les intégrales singulières, permet de majorer la contribution de $\mathfrak{B}^{\gamma}\, p_o$ et termine l'esquisse de démonstration du lemme 3 et donc de la proposition 2.

III - Application au problème de Cauchy

Pour déduire le théorème 1 des propositions 1 et 2, il suffit d'appliquer le résultat abstrait suivant (cf.[10] [13] pour sa démonstration) :

Soient $(E_s)_{o < s \leq s_o}$ une chaîne décroissante d'espaces de Banach, $T > 0$ et, pour tout $t \in [-T,T]$, $P(t)$ un opérateur linéaire dans $\bigcup_{o<s\leq s_o} E_s$ vérifiant :

Il existe $C > 0$ tel que pour $0 < s' < s \leq s_o$, $P \in C^o([-T,T],\mathcal{L}(E_s,E_{s'})$ et $\sup_{|t|\leq T} \|P(t)\|_{\mathcal{L}(E_s\, E_{s'})} \leq \frac{C}{s-s'}$.

Alors pour tout $s \in]o,s_o]$, il existe $\varepsilon \in]0,T[$ tel que, pour tout $f \in C^o([-T,T] , E_{s_o})$ et tout $u_o \in E_{s_o}$, il existe une unique fonction $u \in C^1([-\varepsilon,\varepsilon] , E_s)$ vérifiant

$$\begin{cases} u' - P\,u = f & \text{dans }]-\varepsilon,\varepsilon[\\ u(o) = u_o \,. \end{cases}$$

De plus, si f et P sont holomorphes dans $\{t \in \mathbb{C} \,;\, |t| < T\}$, alors u est holomorphe dans $\{t \in \mathbb{C} \,;\, |t| < \varepsilon\}$.

La régularité C^{∞} (dans le théorème 1) se démontre de facon classique sur l'équation différentielle.

Pour le théorème 2 (résultat d'unicité) on résoud le problème transposé dans des espaces de fonctionnelles analytiques sur Γ , en utilisant la densité de E_s (pour s>o) dans $A(\Gamma)$.

Remarque (cas non linéaire). Pour traiter des problèmes de Cauchy non linéaires pseudodifférentiels analytiques (cf[3]), on utilise aussi un théorème abstrait de [9] mais avec une chaîne $(E_s)_{o<s}$ constituée d'algèbres de Banach. Avec les notations du paragraphe I, en notant $\|\ \|_{\rho}$ une norme holdérienne d'exposant $\rho \in]0,1[$, on note pour s>o

$$E_s = \left\{ u \in C^{\infty}(\Gamma) \ ; \ \sum_{\alpha \in J} \frac{\|X^{\alpha} u\|_{\rho} \, s^{|\alpha|}}{|\alpha|!} < \infty \right\}$$

et on vérifie que les propositions 1 et 2 sont encore vraies avec ces espaces E_s, qui sont des algèbres de Banach.

M.S.BAOUENDI
Université de Paris VI

C.GOULAOUIC
Université de Paris XI

Bibliographie.

[1] M.S. BAOUENDI and C. GOULAOUIC ;
Cauchy problems with multiple characteristic initial hypersurface;
Comm. Pure Appl. Math 26 (1973) 455-475.

[2] M.S. BAOUENDI and C. GOULAOUIC;
Cauchy problems for analytic pseudo-differential operators ;
Comm. in P.D.E. (1976).

[3] M.S. BAOUENDI and C. GOULAOUIC;
Nonlinear Cauchy problems (to appear)

[4] L. BOUTET de MOUVEL;
Operateurs pseudo-differentiels analytiques et problèmes aux limites elliptiques;
Ann. Inst. Fourier 19 (1970) 169-268.

[5] L. BOUTET de MOUVEL and P. KREE;
Pseudo-differential operators and Gevrey classes;
Ann. Inst. Fourier 17 (1967) 295-323.

[6] T. KOTAKE and N.S. NARASIMHAN;
Fractional powers of a linear elliptic operator;
Bull. Soc. Math. France 90 (1962) 449-471.

[7] W. MARGULIES;
Analytic singular integral operators;
Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 391-393.

[8] C.B. MORREY;
The analytic embedding of abstract real analytic manifolds;
Annals of Math. 68 (1958) 159-201.

[9] L. NIRENBERG;
An abstract form of the non linear Cauchy-Kovalewsky theorem.
J. Differential Geometry 6 (1972) 561-576.

[10] L.V. OVYCANNIKOV ;
A singular operator in a scale of Banach spaces;
Dokl. Akad. Nauk SSSR 263.4 (1965) 819-822 =
Soviet Math Dokl. 6 (1965) 1025.

[11] L.V. OVCYANNIKOV;
Non local Cauchy problem in fluid dynamics;
Actes Congres Intern. Math. Nice 3 (1970) 137-142.

[12] L.V. OVCYANNIKOV;
A non linear Cauchy problem in a scale of Banach spaces.
Dokl. Akad. Nauk. SSSR 200.4 (1971) =
Soviet Math. Dokl.12 .5 (1971) 1497-1502.

[13] F. TREVES;
Ovcyannikov theorem and hyperdifferential operators ;
Notas de Matematica 46. IMPA, Rio-de-Janeiro, Brazil (1968).