Ondes oscillantes simples quasilinéaires

Olivier Guès
Institut Mathématique
Université de Rennes 1
35042 Rennes - Cédex , France

Introduction

L'étude de solutions approchées u_ε ou de solutions asymptotiques de la forme

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{j=o}^{M} \varepsilon^j \; u^j \,(x \,, \frac{\phi(x)}{\varepsilon}) + O(\varepsilon^{M+1}) \tag{1}$$

de systèmes hyperboliques du premier ordre, fait l'objet de nombreux travaux. Nous faisons notamment référence à ceux de P. D. Lax [La] (1957) et D. Ludwig [Lu] (1960) dans le cas linéaire, J. L. Joly et J. Rauch [J-R1], [J-R2] (1986) dans le cas d'un système semilinéaire, et Y. Choquet-Bruhat (196O) pour des systèmes quasilinéaires.

Néanmoins, l'existence de **solutions exactes** de la forme (1) n'est connue que dans un ensemble de cas plus restreint : ceux essentiellement d'un système linéaire ([La], [Lu]), ou semilinéaire ([J-R1]).

L'objet de cet exposé est de présenter des résultats d'existence de solutions exactes (1) "**oscillantes**" (c'est à dire que les u^j $(x \,, \theta)$ sont périodiques en θ), dans le cas d'un système **quasilinéaire.** Ces résultats sont tirés d'un article à paraître [G1] auquel nous renvoyons le lecteur pour les démonstrations.

1. Présentation du problème.

On considère un système quasilinéaire du premier ordre

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{n} A_j(u)\, \partial_j u = F(u) \tag{2}$$

où l'inconnue u et la fonction F sont à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, les matrices A_j (de taille $N\times N$) et F étant C^∞ de leur argument. Désignant par $x=(x_o\,, x_1,\ldots, x_n)$ la variable de $\mathbb{R}^{n+1}$, on notera $t=x_o$, $y=(x_1,\ldots,x_n)$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ et $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

• **Structure.** Nous supposerons que le système (2) est **hyperbolique symétrisable** au sens de Friedrichs, c'est à dire qu'il existe une matrice S réelle de taille $N\times N$, C^∞ de ses arguments, symétrique et définie positive telle que les matrices SA_j soient symétriques. On désigne par $\lambda(u\,,\xi)$ une valeur propre (dépendant de façon C^∞ de $(u\,,\xi)\in \mathbb{R}^N\times(\mathbb{R}^n-\{O\})$ de **multiplicité constante** égale à d de la matrice $\sum_{1\leq j\leq n}\xi_j A_j(u)$. Dans le cas $d\geq 2$, nous supposerons en outre que le système (2) est un **système de lois de conservation.**

• **Cadre.** On s'intéresse à un problème de perturbation pour le problème (2); on se place pour cela dans le cadre qui suit , où $T > o$ est un réel fixé une fois pour toutes. On note $\Omega=]O\,,T[\times\mathbb{R}^n$.

- $u^o\in H^\infty(\Omega)$ (l'espace de Sobolev usuel) est une solution régulière de (2) sur Ω.
- $\phi(x)$ est une phase (réelle) régulière du système associée à λ *et* u^o c'est à dire que ϕ vérifie l'équation $\partial_t\phi + \lambda(u^o,\partial_y\phi)=O$ dans Ω et $\partial_y\phi\in H^\infty(\Omega\,;\mathbb{R})+\xi^\circ$ où ξ° est un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n-\{O\})$
- Afin d'énoncer des résultats globaux en y, nous supposerons que

$$|\partial_y\phi(x)-\xi^\circ| + |u^o(x)| \leq \delta$$

où $\delta > o$ est un réel fixé, lié à l'intégrabilité(*) de la distribution de d-plans sur $\mathbb{R}^N$

$$N_\xi(u) = Ker\,[\,\lambda(u\,,\,\xi)\,Id - \sum_{1\leq j\leq n} \xi_j\; A_j(u)\,]\ .$$

• Le problème. On s'intéresse à l'existence de familles de solutions u_ε, $o < \varepsilon \leq 1$, du système (2) qui admettent un développement asymptotique de la forme

$$(3) \qquad u_\varepsilon(x) = u^o(x) + \sum_{j=1}^{M} \varepsilon^j\; u^j\,(x\,, \frac{\phi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon^{M+1}\, R_\varepsilon(x)$$

où l'on demande à $R_\varepsilon(.)$ d'être uniformément borné en ε pour une norme que l'on précisera ultérieurement et aux fonctions $u^j\,(x\,,\theta)$ d'être "régulières" et 2π-périodiques par rapport à la variable réelle θ : $u^j \in H^\infty(\Omega\times S^1; \mathbb{R}^N)$.

2. Les résultats.

Etant donnée une condition initiale g_ε , restriction à $\{t = o\}$ d'une onde oscillante de la forme (3)

$$g_\varepsilon(y) = u^o(o,y) + \sum_{j=1}^{M} \varepsilon^j\; g^j\,(y\,, \frac{\phi(o,y)}{\varepsilon}) + \varepsilon^{M+1}\, r_\varepsilon(y)\ ,$$

considérons le problème de Cauchy suivant :

$$(4)_{T_1} \quad \begin{cases} L(u)u = F(u) \ \text{ sur } \ ]O,T_1[\times\mathbb{R}^n & \text{où l'on note } L(u) = \partial_t + \sum_{j=1}^{n} A_j(u)\partial_j \\ u\,|_{t=o} = g_\varepsilon \end{cases} .$$

Pour $\rho > o$ et $\tau \geq o$ nous introduisons l'ensemble suivant, où $m > \frac{n}{2} + 1$ est un entier fixé, de fonctions qui du point de vue du contrôle L^2 de leurs dérivées en y, ne sont "pas plus singulières" que les $u^j\,(x\,, \frac{\phi(x)}{\varepsilon})$:

(*) Il résulte des hypothèses de structure ([G1]) que le champ de d-plans $N_\xi(.)$ est <u>localement</u> complètement intégrable (ξ est un paramètre). On fixe $\delta > o$ de sorte que $N_\xi(.)$ soit <u>globalement</u> rectifiable dans un voisinage de $\{\,|\,\xi - \xi^\circ| + |u| \leq \delta\}$.

$\mathscr{B}(\rho,\tau) = \{ f_\varepsilon(t, y) \in C^\circ([o,\tau], H^m(\mathbb{R}^n)),\ o<\varepsilon\leq 1$ telles que

$$\|\partial_y^\alpha f_\varepsilon(t,.)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \rho\ \varepsilon^{-|\alpha|} \quad \text{pour } o\leq|\alpha|\leq m,\ o<\varepsilon\leq 1,\ o\leq t\leq\tau \ \}$$

Le théorème qui suit , affirme l'existence de solutions oscillantes au problème $(4)_{T_1}$ à la condition que les $g^j(x,\theta)$ soient "compatibles" c'est à dire que soient vérifiées M relations fonctionnelles de compatibilité (cf [G1]) entre les $\partial_y^\alpha g^j(x,\theta)$ pour $\alpha+j\leq M$.

Théorème 1. *Fixons $M \geq m-1 > \frac{n}{2}$. Supposons les g^j "compatibles" et $r_\varepsilon \in \mathscr{B}(\rho,o)$. Alors il existe $T_1>o$, $\varepsilon_1>o$ et $\sigma>o$ tels que pour $o<\varepsilon<\varepsilon_1$, la solution du problème de Cauchy $(4)_{T_1}$ est de la forme (3) avec $R_\varepsilon \in \mathscr{B}(\rho,T_1)$.*

Théorème 2. *Si λ est linéairement dégénérée (c'est le cas si $d\geq 2$)(*) on peut choisir $T_1=T$ dans le théorème 1. Sinon, T_1 ne dépend que de g^1.*

<u>Remarques.</u> 1. La première des conditions de compatibilité exprime que la partie oscillante du premier terme perturbateur est "polarisée" suivant l'espace propre attaché à λ

$$[\,\lambda(u^o,\partial_y\phi)\, Id - \sum_{j=1}^{n}(\partial_j\,\phi)\,A_j(u)\,]\,(g^1-\bar{g}^1) = O, \text{ où } \bar{g}(x) = \int_O^{2\pi} g(x,\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

ce qui est un résultat bien connu de la théorie des ondes asymptotiques ([La], [C-B], J. Hunter - J. Keller [H-K]).

2. Il existe effectivement des données de Cauchy g_ε compatibles, que l'on peut construire par récurrence.

3. Le théorème 1 <u>n'est pas</u> un théorème d'existence à "temps petit"; au contraire, il contient une <u>minoration du temps d'existence</u> de solutions régulières du problème $(4)_{T_1}$.

(*) Voir par exemple [G2], appendice I.

4. On démontre également ([G1]) la propagation d'ondes oscillantes: une solution de (2) de la forme (1) dans $\{t<o\}$ se prolonge à $\{t<T_1\}$ pour un certain $T_1 > o$; dans ce cas il n'y a pas de conditions de compatibilités à vérifier (elles sont implicitement satisfaites).

3. Plan de la preuve des théorèmes 1 et 2.

La démonstration du théorème1 comporte essentiellement deux étapes.

- **Première étape :** on construit une solution approchée du problème.

Proposition. *Il existe* $T_1 > o$, $\rho_1 > o$ *et* $V_\varepsilon(x) = u^o(x) + \sum_{j=1}^{M+1} \varepsilon^j\ V^j\,(x\,,\frac{\phi(x)}{\varepsilon})$ *tels que*

$$\begin{cases} L(V_\varepsilon)V_\varepsilon = F(V_\varepsilon) + \varepsilon^{M+1}H_\varepsilon & \text{sur }]O\,,T_1[\times\mathbb{R}^n \\ V_\varepsilon\big|_{t=o} = g_\varepsilon + \varepsilon^{M+1}h_\varepsilon \end{cases}$$

où $H_\varepsilon \in \mathcal{B}(\rho_1, T_1)$ *et* $h_\varepsilon \in \mathcal{B}(\rho_1, o)$.

Remarque. 5. Le T_1 fourni par cette proposition est précisément celui qui figure dans l'énoncé du théorème 1 et si λ est linéairement dégénérée, la démonstration montre que l'on peut choisir $T_1 = T$.

Principe de la démonstration. La démonstration de cette proposition (issue de la méthode B.K.W), consiste à substituer (3) dans l'équation (2), et à développer A_j et F par la formule de Taylor à l'ordre M. En ordonnant suivant les puissances de ε, on obtient une expression du type

$$L(V\varepsilon)V\varepsilon - F(V_\varepsilon) = \sum_{j=o}^{M} \varepsilon^j\ F^j\,(x\,,\frac{\phi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon^{M+1}\,H(\varepsilon\,,x\,,\frac{\phi(x)}{\varepsilon})$$

où les $F^j\,(x\,,\theta)$ et $H(\varepsilon\,,x\,,\theta)$ sont des fonctions C^∞ de leurs arguments. Il s'agit alors de déterminer les $V^j(x\,,\theta)$ de sorte que $F^j(x\,,\theta) \equiv O, \dots, F^j\,(x\,,\theta) \equiv O$, ce qui revient à résoudre une famille de systèmes d'équations aux dérivées partielles . Ces équations sont écrites dans l'article d'Y. Choquet-Bruhat [C-B]; la difficulté consiste à trouver des solutions $V^j(x\,,\theta)$ **périodiques** aux équations de Choquet-Bruhat. On y parvient en appliquant au problème, préalablement réduit par un changement d'inconnue adapté (qui permet entre autres de dégager la structure des conditions de compatibilité), les techniques de moyennisation introduites par J.L Joly et J. Rauch lors de l'étude des oscillations semilinéaires ([J-R]).❑

• **Deuxième étape:** on établit l'existence d'une solution (exacte) de la forme $V_\varepsilon + O(\varepsilon^{M+1})$.

Théorème 3. (*V_ε, T_1, ρ_1 de la proposition précédente sont acquis .) Il existe $\varepsilon_1 > o$ et $\sigma > o$ tels que si $s_\varepsilon \in \mathscr{B}(\rho_1, o)$, le problème*

$$\begin{cases} L(u)u = F(u) \text{ sur }]O, T_1[\times \mathbb{R}^n \\ u|_{t=o} = V_\varepsilon|_{t=o} + \varepsilon^{M+1} s_\varepsilon \end{cases}$$

admet pour $o < \varepsilon < \varepsilon_1$, une solution unique, qui s'écrit $u = u_\varepsilon = V_\varepsilon + \varepsilon^{M+1} R_\varepsilon$ où $R_\varepsilon \in \mathscr{B}(\rho, T_1)$.

Pour démontrer le théorème 1, il suffit alors d'appliquer le thèorème 3 en choisissant $s_\varepsilon = - h_\varepsilon$, où h_ε est donnée dans la proposition çi-dessus. Le théorème 2 résulte du théorème 3 et de la remarque 5.❑

Principe de la démonstration du théorème 3. On s'intéresse à la différence $w_\varepsilon = u_\varepsilon - V_\varepsilon$ entre la solution approchée et la solution exacte cherchée, laquelle doit être solution du problème suivant, où l'on a noté pour simplifier V et w au lieu de V_ε et w_ε :

$$\begin{cases} L(V+w)w = F(V+w) - F(V) + [L(V) - L(V+w)]V - \varepsilon^{M+1} H_\varepsilon \text{ sur }]O, T_1[\times \mathbb{R}^n \\ w|_{t=o} = \varepsilon^{M+1} s_\varepsilon \end{cases}$$

On obtient w comme la limite de la suite (w^ν), $\nu = 1,2$ ..., des solutions du schéma itératif qui suit, initialisé avec $w^1(t, y) = \varepsilon^{M+1} s_\varepsilon(y)$:

$$\begin{cases} L(V+w^{\nu})w^{\nu+1} = F(V+w^{\nu}) - F(V) + [L(V) - L(V+w^{\nu})]V - \varepsilon^{M+1} H_{\varepsilon} \text{ sur }]O,T_1[\times \mathbb{R}^n \\ w^{\nu+1}\big|_{t=o} = \varepsilon^{M+1} s_{\varepsilon} \end{cases}$$

On déduit du lemme suivant la convergence de la suite w^{ν}, ainsi que l'estimation du théorème 3 :

Lemme. *Les réels $\sigma > o$, $\varepsilon_o > o$, étant fixés assez petits, on a* :

(5) $\|\partial_y^{\alpha} w_{\varepsilon}^{\nu}(t\,,.)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \sigma\, \varepsilon^{-|\alpha|+M+1}$ *pour* $o \leq |\alpha| \leq m$, $o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$, $o \leq t \leq T_1$, $\nu \in \mathbb{N}$.

On démontre ce lemme par récurrence suivant la méthode de "l'énergie". On estime $\|\partial_y^{\alpha} w_{\varepsilon}^{\nu+1}(t\,,.)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ à l'aide de l'inégalité L^2 classique, en commutant les dérivations ∂_y^{α} à l'opérateur $L(V+w^{\nu})$. Le contrôle des commutateurs repose d'une part sur l'estimation (5) des dérivées de w^{ν} (hypothèse de récurrence) et sur le contrôle L^{∞} des dérivées de V

(6) $$\|\partial_y^{\alpha} V_{\varepsilon}(t\,,.)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq \begin{cases} c\,, si\ \alpha = o\,. \\ c\,\varepsilon^{1-|\alpha|} \text{ ,si } 1 \leq |\alpha| \leq m+1\,. \end{cases} \text{ , pour } o<\varepsilon\leq 1,\ o \leq t \leq T_1\ ,$$

le point essentiel étant que, si l'on note $\mathscr{A}(c,T_1)$ l'ensemble des fonctions vérifiant (6), puis $\mathscr{B} = \bigcup_{\rho > o} \mathscr{B}(\rho,T_1)$ et $\mathscr{A} = \bigcup_{c > o} \mathscr{A}(c,T_1)$, alors l'espace $\mathscr{A} + \varepsilon^{M+1}\ \mathscr{B}$ est une C^{∞} algèbre de composition.❑

REFERENCES

[C-B] Y. CHOQUET-BRUHAT : *Ondes asymptotiques et approchées pour les systèmes non linéaires d'équations aux dérivées partielles* , J. Math. Pures et appliquées , 48 (1969) .

[G1] O. GUES : *Développement asymptotique de solutions exactes de systèmes hyperboliques quasilinéaires,* Préprint Univ. de Rennes 1, (1989).

[G2] O. GUES : *Problèmes mixtes hyperboliques quasilinéaires caractéristiques,* Thèse, université de Rennes.1 (1989).

[La] P. D. LAX : *Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems,* Duke Math. J. 24, (1957) 627-646.

[Lu] D. LUDWIG : *Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem* , Comm. Pure Appl. Math. , 13, (1960) , 473-508 .

[H-K] J. HUNTER - J. KELLER : *Weakly nonlinear high frequency waves* , Comm. Pure Appl. Math. , 36, (1983) , 547-569 .

[J-R1] J.L. JOLY - J. RAUCH : *high frequency semilinear oscillations* , Colloque pour le 60° anniversaire de P. Lax , Berkeley (1986)

[J-R2] J.L. JOLY - J. RAUCH : *Ondes oscillantes semi–linéaires à hautes fréquences,* Proceedings of the Workshop on Hyperbolic Equations , Pise (1987) , Pitman Research Notes in Math. Series .