ONDES SEMI-LINEAIRES CONORMALES CLASSIQUES PAR RAPPORT A DEUX HYPERSURFACES TRANSVERSES

B. NADIR et A. PIRIOU
Université de Nice

Soit un système semi-linéaire du premier ordre dans un ouvert X de $\mathbb{R}^n$

(1) $$\sum_{j=1}^{n} A_j(x)\, \partial_j\, u \;+\; f(x\,,u) \;=\; 0$$

où $A_j \in C^\infty(X\,, End\,(\mathbb{C}^N))$, $f \in C^\infty(X \times \mathbb{C}^N\,,\ \mathbb{C}^N)$.

En fait, on supposera que la dimension N du système vaut 2, sauf dans le paragraphe I, où N peut être quelconque. Avant de considérer le croisement de deux ondes conormales, dont l'une au moins est classique, rappelons brièvement les résultats connus dans le cas d'une seule onde.

I - RAPPEL : cas d'une onde conormale simple ([6], [12], [16])

Soit Σ une hypersurface fermée de X, simplement caractéristique pour (1). Pour $s \in \mathbb{R}$, l'espace $H^s_\Sigma(X)$ est constitué des distributions u dans X (conormales par rapport à Σ) telles que :

(2) u est dans l'espace de besov ${}^\infty H^{loc}_s(X)$, et $Z_1 \ldots Z_\ell\, u \in {}^\infty H^{loc}_s(X)$ pour tout ℓ et pour tous champs Z_j (à coefficients C^∞) tangents à Σ.

Localement, pour $\Sigma = \{ x = (x_1\,, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \;/\; x_1 = 0 \}$, $H^s_\Sigma(X)$ est constitué des distributions de la forme

$$u\,(x) \;=\; \int e^{i\, x_1\, \xi_1}\; a\,(x\,,\xi_1)\; d\;\xi_1$$

où $a\,(x\,,\xi_1)$ est un symbole dans $S^\mu\,(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $\mu = -s - 1/2$ (voir [5]).

On posera $H^s_\Sigma(X) = I^\mu(X)$. Si X^+ est une demi-région délimitée par Σ (définie localement par $x_1 > 0$), $I^\mu(X^+)$ désigne l'espace des distributions dans X^+ qui admettent un prolongement dans $I^\mu(X)$. Si $u \in I^\mu(X^+)$, alors u est de classe C^k lorsque $\mu + k < -1$, et on dira que $u \in \mathring{I}^\mu_\Sigma(X^+)$ si $\partial^\alpha u_{|\Sigma} = 0$ lorsque $\mu + |\alpha| < -1$.

Soit D une échelle de degrés d'homogénéité, telle que :

$$\begin{cases} \mathbb{N} \subset D \subset \mathbb{C} \quad ; \quad D + D \subset D \quad ; \quad \overline{D} = D \\ \text{pour tout } \; M \text{, l'ensemble } \{ d \in D \; / \; Re\,(d) < M \} \text{ est fini} \end{cases}$$

(noter qu'on a alors $D \subset \{0\} \cup \{Re\,(d) > 0\}$).

Une distribution u dans X^+ est dite conormale classique de type D par rapport à Σ en un point p de Σ si, au voisinage de p dans X^+, u admet un développement asymptotique

(3) $$u\,(x) \sim \sum_{d \in D} \sigma_d\,(x')\, x_1^d \;, \qquad \sigma_d \in C^\infty(\Sigma)$$

en ce sens que

(4) $$u\,(x) - \sum_{Re(d) < M} \sigma_d\,(x')\, x_1^d \in I_\Sigma^{-M-1}$$

En traduisant cette propriété par $u \in I_\Sigma^D\,(p)$, on a le résultat de propagation :

THÉORÈME : *Soit* $u \in H_\Sigma^s(X^+)$ *une solution de* (1), *avec* $s > 1/2$. *Alors l'ensemble* $\{p \in \Sigma \; / \; u \in I_\Sigma^D(p)\}$ *est une réunion de bicaractéristiques.*

II - ETUDE DU CROISEMENT

On suppose désormais $N = 2$, et on considère deux hypersurfaces fermées Σ_1, Σ_2 de X, caractéristiques pour (1), se coupant transversalement selon une sous-variété Γ de codimension 2, les caractéristiques sur Σ_1, Σ_2 étant transverses à Γ. Soit encore X^+ une demi-région délimitée par Σ_1, et X^{++}, X^{+-} les quadrants de X^+ délimités par Σ_2.

On utilisera des coordonnées locales telles que :

$$\Sigma_1 = \{x = (x_1, x_2, x'') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-2} \; / \; x_1 = 0\}, \qquad \Sigma_2 = \{x_2 = 0\}$$
$$X^+ = \{x_1 > 0\}, \qquad X^{++} = \{x_1 > 0, \; x_2 > 0\}, \qquad X^{+-} = \{x_1 > 0, \; x_2 < 0\}.$$

Rappelons ([3], [4], [7]) que l'espace $H^s_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} X)$ (de distributions conormales par rapport à $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$) est défini comme au (2), en remplaçant Σ par $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$; $H^s_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}(X^{++})$ est encore défini par prolongement.

On a le :

THÉORÈME 1 : *Soient* $p \in \Gamma$, *C la bicaractéristique sur* Σ_1 *issue de* p, $u \in \mathcal{D}'(X^+)$ *une solution de* (1) *telle que* $u_{|X^{++}} \in H^s_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}(X^{++})$, $u_{|X^{+-}} \in H^s_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}(X^{+-})$ (*u est conormale par morceaux*), *avec* $s > 1$.

Si $u \in I^D_{\Sigma_1}(q)$ *en un point* $q \in C \setminus \{p\}$, *alors* $u \in I^D_{\Sigma_1}$ *en tout point de* $C \setminus \{p\}$.

Pour établir ce résultat, on commence par introduire des espaces de distributions conormales plus souples que celles de $H^s_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}$; leur front d'onde est encore contenu dans la réunion des fibrés conormaux à Σ_1, Σ_2 et Γ, mais les régularités peuvent y être différentes.

Pour $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, appelons $J^{\mu,\nu}(X)$ l'espace des distributions qui s'écrivent localement

$$u(x) = \int\int e^{i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} a(x, \xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$$

avec un symbole $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tel que :

$$\left|\partial_x^\beta\, \partial_{\xi_1}^{\alpha_1}\, \partial_{\xi_2}^{\alpha_2}\, a(x, \xi_1, \xi_2)\right| \leq C(1 + |\xi_1|)^{\mu - \alpha_1}(1 + |\xi_2|)^{\nu - \alpha_2}.$$

On définit de même l'espace $I^{\mu,\nu}(\xi)$ à l'aide de symboles vérifiant la majoration précédente pour $|\xi_2| \leq |\xi_1|$, et la majoration

$$\left|\partial_x^\beta\, \partial_{\xi_1}^{\alpha_1}\, \partial_{\xi_2}^{\alpha_2}\, a(x, \xi_1, \xi_2)\right| \leq C(1 + |\xi_2|)^{\mu - \alpha_2}(1 + |\xi_1|)^{\nu - \alpha_1}$$

pour $|\xi_1| \leq |\xi_2|$.

Posons $s = -\mu - 1/2$, $t = -\nu - 1/2$. Sur les fibrés conormaux à Σ_1, Σ_2, Γ, et en dehors des intersections deux à deux, un élément de $J^{\mu,\nu}$ est (microlocalement) respectivement dans $H^s_{\Sigma_1}$, $H^t_{\Sigma_2}$, H^{s+t}_Γ. Pour un élément de $I^{\mu,\nu}$, on obtient respectivement $H^s_{\Sigma_1}$, $H^s_{\Sigma_2}$, H^{s+t}_Γ. On a la

PROPOSITION 1 : (*i*) *Pour* $\mu = -s - 1/2$ *et* $\varepsilon > O$, *on a*

$$H^s_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \subset I^{\mu, -1/2} \subset H^{s-\varepsilon}_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}$$

(*ii*) $J^{\mu,\nu}$ (*resp.* $I^{\mu,\nu}$) *est une algèbre de fonctions continues, stable par l'action des fonctions* C^∞ *si* $\mu, \nu < -1$ (*resp.* $\mu < -1$, $\mu + \nu < -2$, $\mu \leq \nu < -1/2$).

Il sera important de contrôler les traces sur Σ_1 ou Σ_2 d'une distribution conormale ; si $\mu < -1$, appelons $J_1^{\mu,\nu}$ le sous-espace des $u \in J^{\mu,\nu}$ telles que $\partial^\alpha u_{|\Sigma_1} = 0$ pour $|\alpha| + \mu < -1$. On définit de même $J_2^{\mu,\nu}$ si $\nu < -1$, et on pose : $J_{1,2}^{\mu,\nu} = J_1^{\mu,\nu} \cap J_2^{\mu,\nu}$ si μ , $\nu < -1$.

Pour contrôler jusqu'à l'arête Γ le développement asymptotique d'une distribution conormale classique par rapport à Σ_1 en dehors de Γ, nous dirons qu'une distribution $u \in \mathscr{D}'(X^{++})$ est dans $J^{D,\nu}(p)$, où $p \in \Gamma$, si le développement (3) a lieu, au voisinage de p dans X^{++}, avec des coefficients $\sigma_\alpha \in I_\Gamma^\nu(\Sigma_1)$ et un reste (4) dans $J_1^{-M-1,\nu}$.

La preuve du théorème 1 se décompose en 4 étapes :

1°) *Régularité à l'arête.*

En mettant (1) sous la forme réduite :

$$
(5) \qquad \begin{cases} X_2\, u_1 + T_1(x, \partial'')\, u_2 + f_1(x, u) = 0 \\ X_1\, u_2 + T_2(x, \partial'')\, u_1 + f_2(x, u) = 0 \end{cases}
$$

où X_j est le champ bicaractéristique sur $\{x_j = cste\}$, T_j d'ordre 1 en $\partial'' = (\partial_3, \dots, \partial_n)$, et en utilisant la proposition 1 (ainsi que l'analogue du (ii) bien connu dans $H^s_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}$ si $s > 1$), on obtient la

PROPOSITION 2 : *Soit* $u \in H^s_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}(X^{++})$ *une solution de* (1), *avec* $s > 1$. *Alors* $u \in I^{\mu,\mu-1}(X^{++})$ *pour* $\mu = -s - 1/2$.

On a donc $u \in I^{\mu,\mu}(X^{++}) = J^{\mu,\mu}(X^{++})$.

2°) *Propagation jusqu'au bord* Σ_2 *dans* X^{++}

En supposant $u \in I^D_{\Sigma_1}(q)$ si $q \in C \cap \{x_2 > O\} : u^+ \in J^{D,\mu}(p)$ où $u^+ = u_{|X^{++}}$. En reportant dans (5) le développement (3), où les $\sigma_d \in C^\infty(\Sigma_1 \cap \{x_2 > 0\})$, on obtient des équations de transport qui permettent d'exprimer les σ_d en fonction de σ_o ; puisque $\sigma_o = u|_{\Sigma_1} \in I^\mu_\Gamma(\Sigma_1)$, on obtient facilement $\sigma_d \in I^\mu_\Gamma(\Sigma_1)$.

On considère $v \in J^{D,\mu}$ telle que $v \sim \Sigma\, \sigma_d\, x_1^d$, et il s'agit de montrer que $w = u^+ - v$ est dans $J_1^{-\infty,\mu}$. Puisque $w_{|\Sigma_1} = 0$, on peut trouver λ $(-2 \leq \lambda < -1)$ tel que $u^+, v \in J^{\lambda,\mu}$, $w \in J_1^{\lambda,\mu}$. D'une façon générale, supposons $w \in J_1^{\sigma,\mu}$ avec $\sigma < -1$ et montrons que $w \in J_1^{\sigma-1,\mu}$. On a

(6) $\quad X_2\, w_1 + T_1(x, \partial'')\, w_2 + f_1(x, u^+) - f_1(x, v) \in J_1^{-\infty,\mu}$

(7) $\quad \partial_1\, w_2 + T_3(x, \partial'')\, w + f_2(x, u^+) - f_2(x, v) \in J_1^{-\infty,\mu}$

et la propriété :

(8) $\quad$ Si $a \in J^{\lambda,\mu}$, $b \in J_1^{\sigma,\mu}$ alors $a\, b \in J_1^{\sigma,\mu}$

qui montre, grâce à la formule de Taylor, que $f_2(x, u^+) - f_2(x, v) \in J_1^{\sigma,\mu}$.

L'intégration de (7) donne alors $w_2 \in J_1^{\sigma-1,\mu}$, ce qui permet d'écrire (6) sous la forme :

$$(X_2 + h)\, w_1 \in J_1^{\sigma-1,\mu}, \text{ avec } h \in J^{\lambda,\mu}$$

on en déduit, en utilisant encore (8), que $w_1 \in J_1^{\sigma-1,\mu}$.

3°) *Traces sur* Σ_2

On a $u^+_{|\Sigma_2} \in I_\Gamma^D(p)$. Mais (5) étant satisfait au sens des distributions dans X^+, on a $u^-_{1|\Sigma_2} = u^+_{1|\Sigma_2}$, où $u^- = u_{|X^{+-}}$. Donc $u^-_{1|\Sigma_2} \in I_\Gamma^D(p)$.

4°) *Propagation à paritr du bord* Σ_2 *dans* X^{+-}

Comme au 2°), on en déduit que $u^- \in J^{D,\mu}(p)$, d'où $u \in I_{\Sigma_1}^D(q)$ si $q \in C \cap \{x_2 < 0\}$.

III - DEVELOPPEMENTS BI-CLASSIQUES

Pour étudier les distributions simultanément classiques par rapport à Σ_1 et Σ_2 relativement à des échelles de degrés D, D', on introduit l'espace $J^{D,D'}(X^{++})$ des distributions u dans X^{++} admettant un développement asymptotique du type produit :

$$u \sim \sum_{d \in D,\, d' \in D'} \sigma_{d,d'}(x'')\, x_1^d\, x_2^{d'}, \qquad \sigma_{d,d'} \in C^\infty(\Gamma)$$

en ce sens que

$$u - \sum_{\substack{Re(d)<M \\ Re(d)<M'}} \sigma_{d,d'}\, x_1^d\, x_2^{d'} \in E_{-M-1,-M'-1}$$

où $$E_{\tau,\tau'} = J_1^{\tau,D'} + J_2^{D,\tau'} + J_{1,2}^{\tau,\tau'} .$$

On a le :

THÉORÈME 2 (croisement de deux ondes classiques) : *Soit* $u \in H^s_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}(X^{++})$ *une solution de* (1), *avec* $s > 1$. *Pour* $p \in \Gamma$, *appelons* C_1, C_2 *les demi–bicaractéristiques sur* $\Sigma_1 \cap \overline{X}^{++}$, $\Sigma_2 \cap \overline{X}^{+-}$ *issues de* p. *Si* $u \in I^D_{\Sigma_1}$ *aux points de* $C_1 \setminus \{p\}$ *et si* $u \in I^D_{\Sigma_2}$ *aux points de* $C_2 \setminus \{p\}$, *alors* $u \in J^{D,D'}$ *au voisinage de* p *dans* X^{++}.

Pour la démonstration, on commence par remarquer que $u_{|\Sigma_2} \in I^D_\Gamma(p)$, $u_{|\Sigma_1} \in I^{D'}_\Gamma(p)$ d'après la preuve du th. 1 (cf 3°)).

En posant $E = \bigcap_{\tau,\tau'} E_{\tau,\tau'}$ et en reprenant la forme réduite (5) de (1), on construit $v \sim \Sigma\, \sigma_{d,d'}\, x_1^d\, x_2^{d'}$ dans $J^{D,D'}$ solution du problème de goursat dans X^{++} :

$$\begin{cases} \Sigma\, A_j\, \partial_j v + f(x,v) \in E \\ (u_1 - v_1)_{|\Sigma_2} = O, \quad (u_2 - v_2)_{|\Sigma_1} = O \end{cases}$$

(les $\sigma_{d,d'}$ sont déterminés par des relations de récurrence explicites, et on construit un représentant v convenable). On montre que $u - v \in E$ en utilisant en particulier les deux propriétés suivantes, dont la première est plus forte que (8) :

Si $a \in J_1^{\alpha,\beta}$, $b \in J_1^{\alpha',\beta}$, $\alpha, \alpha', \beta < -1$, α *et* $\alpha' \notin \mathbb{Z}$, *alors* $a\,b \in J_1^{\alpha+\alpha'+1,\beta}$.

Si $a \in J_{1,2}^{\alpha,\beta}$, $b \in J_{1,2}^{\alpha',\beta'}$, $\alpha, \alpha', \beta, \beta' < -1$, *et non dans* $\mathbb{Z}$, *alors* $a\,b \in J_{1,2}^{\alpha+\alpha'+1,\ \beta+\beta'+1}$.

Signalons que B. Nadir et J. P. Varenne [11] ont obtenu des résultats analogues pour le problème de Cauchy à donnée initiale classique par morceaux, et pour la réflexion transverse d'une onde classique par morceaux sous la condition de Lopatinski uniforme.

RÉFÉRENCES

[1] ALINHAC S : *Interaction d'ondes simples pour des équations non linéaires générales* ; Current Topics in PDE, Kinekuniya Co., 1985, Japon.

[2] BONY J. M : *Interaction de singularités pour des équations aux dérivées partielles non linéaires* ; Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz, n° 22, 1979-80.

[3] BONY J. M : n° 2, 1981-82.

[4] BONY J.M : *Singularités des solutions de problèmes de Cauchy hyperboliques non linéaires*. Advances in microlocal analysis, H. G. Garnier (ed), D. Reidel (1986), 15-39.

[5] HORMANDER L : *The analysis of linear partial differential operators*. Springer Verlag, 1985, t. III.

[6] MELROSE R. B. - RITTER N : *Interaction of progressing waves through a non linear potential*. Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz, n° 12, 1983-84.

[7] MELROSE R. B. - RITTER N :*Interaction of non linear progressing waves for semilinear waves equations*. Ann. Math. 121 (1985), 187-213.

[8] METIVIER G : *The Cauchy problem for semilinear hyperbolic systems with discontinuous data*. Duke Math. J., vol. 53, n° 4 (1986), 983-1011.

[9] METIVIER G : *Propagation, interaction and reflection of discontinuous progressing waves for semilinear hyperbolic systems*.

[10] NADIR B. - PIRIOU A : *Ondes semi–linéaires conormales par rapport à deux hypersurfaces transverses*.

[11] NADIR B. - VARENNE J.P : *Problème de Cauchy et réflexion transverse pour une onde conormale classique*. Prépublication (1989), Nice.

[12] PIRIOU A : *Calcul symbolique non linéaire pour une onde conormale simple*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 38, 4 (1985), 173-187.

[13] RAUCH J. - REED M : *Non linear microlocal analysis of semilinear hyper–bolic systems in one space dimension*. Duke Math. J., vol 49, n° 2 (1982), 397-475.

[14] RAUCH J. - REED M : *Striated solutions of semilinear two speed waves equations*. Indiana Univ. Math. J., 34 (1985), 337-353.

[15] RAUCH J. - REED M : *Discontinuous progressing waves for semilinear systems*. Comm. in partial different equations, 10, (9) (1985), 1033-1075.

[16] RAUCH J. - REED M : *Propagation of equality and classicity for conormal solutions of semilinear systems*. Comm. in partial different equations, vol. 13, n° 10, 1988.