Propagation de la régularité microlocale pour des problèmes de Dirichlet non linéaires d'ordre deux

XU CHAO-JIANG
UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
CENTRE D'ORSAY, BÂT. 425
91405 ORSAY CEDEX, FRANCE.

1. Introduction.

Dans ce travail, on étudie la régularité microlocale des solutions pour des problèmes aux limites non linéaires. le résultat est analogue à ceux obtenus pour les problèmes linéaires et semi-linéaires [3], [4], [5], [6], [7].

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert à bord defini par $\varphi \geq 0$ où φ est de classe C^∞. Nous considérons une solution réelle $u \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ $(s > 5 + \frac{n}{2})$ de l'équation suivante :

$$F(y, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0 \tag{1}$$

où F est une fonction réelle C^∞. On désigne par :

$$L(y, D_y) = \sum_{|\alpha| \leq 2} (\partial_{z_\alpha} F)\left(y, \partial^\beta u(y)\right) \partial^\alpha \tag{2}$$

l'opérateur différentiel linéarisé de F en u. Nous supposerons toujours que $\partial\Omega$ est non caractéristique pour L et que son symbole principal $L_0(y, \xi)$ est de type principal réel.

Dans un voisinage de $x_0 \in \partial\Omega$, par un changement de variables χ_1 de classe C^∞, on peut supposer que Ω et $\partial\Omega$ sont respectivement définis par $x_1 \geq 0$ et $x_1 = 0$. D'après une proposition de SABLÉ-TOUGERON, pour $u \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ solution de l'équation (1), on peut définir, de manière invariante, " u est microlocalement de classe $H^{s'}$ au point α^0 ", (noté $H^{s'}_{\alpha^0}$) où $\alpha^0 = (x_0, \xi') \in T^*\partial\Omega \backslash \{0\}$, $s' \leq 2s - 2 - \frac{n}{2}$. Comme $L_0(y, \xi) \in C^3$, on peut définir, comme dans [4], les ensembles des points elliptiques, hyperboliques et de glancing (notés E, H et G), et aussi $G = G_d \cup G_g \cup G^3$, où G_d est l'ensemble de diffraction et G_g l'ensemble de gliding. Le comportement de la solution u dans les régions elliptiques, hyperboliques, de diffraction et de gliding est bien étudié par SABLÉ-TOUGERON [8] et LEICHTNAM [5].

Nous allons donc étudié le comportement de la solution près des points de G^3. Remarquons que, en général, on ne peut pas définir G^k pour $k > 4$, comme dans [4], car on a $L_0 \in C^3$ seulement.

Nous cherchons maintenant des conditions sur G^3 pour l'existence et l'unicité locale d'une courbe bicaractéristique généralisée (cf. [**4**]).

Suivant HÖRMANDER [**4**], le champ de vecteur

$$H_{L_0}^G = H_{L_0} + (H_{L_0}^2\varphi / H_\varphi^2 L_0) H_\varphi \tag{3}$$

tangent à G est appelé le champ de vecteur de gliding. $H_{L_0}^G$ est indépendant du choix de φ. Comme $L_0 \in C^3$ est de type principal réel, $H_{L_0}^G$ est un champ de vecteur de classe C^1 et non nul. Ceci permet de montrer que le champ de vecteur $H_{L_0}^G$ définit un feuilletage de G par les courbes intégrales de $H_{L_0}^G$. Maintenant, pour tout $\alpha^0 \in G^3$, il existe une unique courbe de gliding $\beta_{\alpha^0}(t)$ avec $\beta_{\alpha^0}(0) = \alpha^0$ définie sur $I = I_+ \cup I_-$, où $I\pm$ est un demi-voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$. Nous donnons la définition suivante :

$$G^* = \Big\{ \alpha^0 \in G^3 \ ; \ \text{fonction } t \mapsto H_{L_0}^2 \varphi(\beta_{\alpha^0}(t)) \text{ est}$$
$$\text{monotone respectivement sur } I_+ \text{ et } I_- \Big\} .$$

On a alors :

LEMME 1.1.

Soit $\Gamma = \{\gamma(t); t \in \mathbf{R}\}$ *une courbe de bicaractéristique généralisée de* L_0. *Supposons que* $\Gamma \cap \{G^3 \setminus G^*\} = \phi$, Γ *est alors déterminée par un quelconque de ses points.*

Notre théorème principal est le suivant :

THÉORÈME 1.1.

Soit $u \in H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$, $s > 5 + \frac{n}{2}$, $u \,|_{\partial\Omega} \in C^\infty$, *une solution réelle du problème de Dirichlet non linéaire pour l'équation* (1). *Soit* $s' < 2s - \frac{n}{2} - 4 - \frac{1}{2}$. *Supposons que* u *soit microlocalement de classe* $H^{s'}$ *en un point de* Γ. *Supposons aussi que, pour* $\alpha \in \Gamma \cap G_d$, *la projection sur la base de* $H_{L_0}(x_0, \xi_0, \lambda_1 \eta_0)$ *soit non nulle, où* $\alpha = (x_0, \xi_0, \eta_0 \in N_{x_0}^* \partial\Omega \setminus \{0\}$, λ_1 *racine réelle double de* $L_0(x_0 \xi_0 + \lambda_1 \eta_0)$. *Alors en tout point de* Γ, u *est microlocalement de classe* $H^{s'-\delta}$ *(pour tout* $\delta > 0$*).*

REMARQUE.

Le théorème de propagation de J-M. BONY [**3**] à l'intérieur et le théorème de réflexion près des points hyperboliques du bord ([**2**], [**8**]) correspondent à l'indice $s' \leq 2s - 2 - \frac{n}{2}$. Dans l'énoncé précédent, il y a donc une perte de $2 + \delta + \frac{1}{2}$ par rapport à ces résultats. Les indices de

E. LEICHTNAM dans [**5**] ne sont pas corrects, car pour obtenir l'équation paradifférentielle canonique du Théorème, on doit utiliser la paracomposition, et cela entraîne une perte d'un cran de régularité (l'équation (5) de [**5**] n'a pas lieu). Mais, à partir de l'équation canonique, la démonstration de [**5**] est correcte. On utilisera donc les résultats de [**5**] avec cette correction d'indices.

2. Paralinéarisation tangentielle de l'équation.

Nous étudions maintenant l'équation (1) dans un voisinage de $x_0 \in \partial\Omega$. Le fait que $\partial\Omega$ soit non caractéristique et le théorème des fonctions implicites assurent l'existence d'une carte de bord $\tilde{\omega}_+$ $(\subset \bar{\mathbf{R}}^n_+)$ dans laquelle l'équation (1) s'écrit sous la forme suivante :

$$(4) \qquad \partial^2_{x_1} u + G(x, \ldots, \partial^\alpha u, \ldots) = 0$$

où $|\alpha| \leq 2$, $\alpha \neq (2,0,\ldots,0)$, G est une fonction réelle C^∞ à support compact en x. Comme pour $t > \dfrac{1}{2}$, $t + t' > \dfrac{n}{2}$, $t + 2t' > \dfrac{1}{2}$, $H^{t,t'}(\mathbf{R}^n)$ est une algèbre, on a alors, avec $\tilde{t} = s - 2 - \dfrac{1}{2} - \varepsilon$ (pour tout $\varepsilon > 0$),

$$u \in H^{s+\tilde{t},-\tilde{t}}(\tilde{\omega}_+) \subset H^{s+\rho,-\rho}(\tilde{\omega}_+)$$

où $\rho = s - 2 - \dfrac{n}{2}$. En utilisant la paralinéarisation tangentielle ([**8**]), on a obtenu une équation paradifférentielle tangentielle :

$$(5) \qquad \partial^2_{x_1} u + \sum_{j=2}^{n} \Pi'_{b_{j_1}} \partial_{x_j} \partial_{x_1} u + \tilde{R}(x, D')u + \Pi'_{b_1} \partial_{x_1} u = g$$

où

$$\tilde{R}(x, D') = \sum_{j,k=2}^{n} \Pi'_{b_{j\,k}} \partial_{x_j} \partial_{x_k} + \sum_{j=2}^{n} \Pi'_{b_j} \partial_{x_j} + \Pi'_c \ ,$$

$g \in H^{s+\tilde{t}-2,-\tilde{t}+\rho}(\tilde{\omega}_+)$ et $b_{j,k}$, $b_{j,c} \in H^{s+\tilde{t}-2,-\tilde{t}}(\tilde{\omega}_+)$. Π' est le paraproduit tangentiel (défini en [**8**]). Pour utiliser la méthode de démonstration du cas linéaire, on doit éliminer les termes croisés dans (5), et mettre l'équation (5) sous forme canonique.

Nous considérons d'abord les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1} + \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \overline{b_{j_1}} \dfrac{\partial g_k}{\partial x_j} = 0 & \text{sur } \tilde{\omega} \\ g_k \big|_{x_1=0} = g_k^0 & k = 2, \ldots, n \end{cases}$$

où $g_k^0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ est égale à x_k dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^{n-1}$, $\tilde{\omega}_+ = \tilde{\omega} \cap \bar{\mathbf{R}}^n_+$, $\overline{b_{j_1}} \in H^{s+\tilde{t}-2,-\tilde{t}}(\tilde{\omega})$ des prolongements de b_{j_1}.

On définit maintenant :

$$\theta : \tilde{\omega} \to \omega \ , \quad \theta(x_1, x') = (y_1, y') \tag{6}$$

avec $y_1 = x_1$, $y_j = g_j(x)$, $j = 2, \ldots, n$. En utilisant l'estimation d'énergie et la propriété d'algèbre de $H^{t,t'}$, on peut démontrer le lemme suivant :

LEMME 2.1.

i) *θ est un difféomorphisme de la classe $H^{s+\tilde{t}-2,-\tilde{t}}$*

ii) *Soit $p_0(x,\xi)$ le symbole principal de l'équation* (5), *et $\chi = \theta^{-1}$, on a alors :*

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0(y,\eta) &= p_0\left(\chi(y), \frac{\partial\theta}{\partial x}(\chi(y))\eta\right) \\ &= \eta_1^2 + \sum_{j\,k=2}^{n} a_{jk}(y)\eta_j\eta_k \end{aligned} \tag{7}$$

où $a_{jk} \in H^{s+\tilde{t}-3,-\tilde{t}}(\omega)$, et $a_{jk}\big|_{\omega_+}$ indépendant du choix des prolongements des b_{jk}.

Nous allons construire un opérateur de "paracomposition" χ^*. Comme dans [**1**], il conserve la régularité microlocale de la solution et qui conjugue l'opérateur paradifférentiel tangentiel de (5) en un opérateur paradifférentiel tangentiel de symbole principal $\tilde{p}_0$ défini en (7). On va démontrer le :

THÉORÈME 2.1.

Soit $\tilde{u} \in H^{s+\tilde{t},-\tilde{t}}(\tilde{\omega}_+)$ la solution de (5), *$\tilde{P}$ l'opérateur paradifférentiel tangentiel de symbole $\tilde{p}$ défini à l'aide de Π'. On a alors*

$$\tilde{P}(\chi^* u) = f \in H^{s+\rho-3-\varepsilon}(\omega_+) \ ,$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

3. Paracomposition dans le demi-plan $\overline{\mathbf{R}}^n_+$.

Soit $\chi \in H^{\tau,\tau'}$ un difféomorphisme de ω dans $\tilde{\omega}$, avec $\chi = (\chi_1, \chi')$, $\chi_1(y) \equiv y_1$ pour $\tau > \frac{1}{2}$, $\tau + \tau' > \frac{n}{2}$; On pose $\rho(\tau,\tau') = \min\left\{\tau - \frac{1}{2}, \tau + \tau' - \frac{n}{2}\right\}$ si $\tau' \neq \frac{n-1}{2}$; $\rho(\tau,\tau') < \tau - \frac{1}{2}$ si $\tau' = \frac{n-1}{2}$.

Supposons toujours $\rho(\tau,\tau') > 1$. Nous considérons, comme dans [**1**] et [**8**], deux systèmes de couronnes dyadiques :

i) Les petites couronnes c_p, c'_p avec les décompositions δ_p, $\delta'_{p'}$, s_p, $s'_{p'}$ et $\delta_{pp'}$, $s_{pp'}$;

ii) les grandes couronnes C_p, $C'_{p'}$ avec les décompositions Δ_p, $\Delta'_{p'}$, S_p, $S'_{p'}$ et $\Delta_{pp'}$, $S_{pp'}$.

Les distributions $u \in \varepsilon'(\tilde{\omega})$ seront découpées selon le système de petites couronnes, $u = \sum_{p,p'} \delta_{pp'} u = \sum_{pp'} u_{pp'}$. Pour un compact $K \subset \omega$ donné, les grandes couronnes vérifient la condition suivante : pour y voisin de $\chi^{-1}(K)$, $\xi \in c_j$, on a ${}^t\chi'(y)\ \xi \in C_j$. Les distributions $v \in \varepsilon'(\omega)$ seront découpées par le système de grandes couronnes.

On notera, pour $v \in \varepsilon'(\omega)$, $[v]_{pp'} = \Sigma v_{jj'}$, où la somme est étendue à tous les indices j et j' pour lesquels le spectre de $v_{jj'}$ rencontre $C_p \cap C'_{p'}$. On remarque que, dans les doubles décompositions dyadiques, il existe seulement les termes $u_{pp'}$ avec $p' \leq p + N_0$, pour certain $N_0 > 0$ fixé, parce que si $p' > p + N_0$, on a $C_p \cap C'_{p'} = \phi$. Soit $u \in \varepsilon'(\tilde{\omega})$ avec $\operatorname{supp} u \subset K$; on pose :

(8)
$$\chi^{**}(u) = \sum_{p'p} [\psi_1 (u_{pp'} \circ \chi)]_{pp'}$$

où $\psi_1 \in C_0^\infty(\omega)$, $\psi_1 = 1$ dans un voisinage de $\chi^{-1}(K)$.

La définition de χ^{**} fait intervenir une troncature ψ_1, un système de couronnes $c_p \cap c'_{p'}$ et une "recoupe" $[\ \cdot\ ]_{pp'}$. Lorsqu'on change ces éléments, χ^{**} sera modifié par un opérateur qui envoie $H^{s,s'}_{\text{comp}}(K)$ dans $H^{s,s'+\rho-1-\varepsilon}$ pour tout $s, s' \in \mathbf{R}$ avec $s' \leq 0$, $s' + \rho(\tau, \tau') - 1 > 0$, $s > \frac{1}{2}$, $s + s' > \frac{n}{2}$. On a aussi, pour $\chi_0 : \omega_0 \to \omega_1$, $\chi_1 : \omega_1 \to \omega_2$ deux $H^{\tau,\tau'}$-difféomorphisme de type précédent. On a alors ($\psi \in C_0^\infty(\omega_1)$, $\psi = 1$ en $\chi_1^{-1}(K)$).

(9)
$$\chi_0^{**}(\psi \chi_1^{**}(u)) = (\chi_1 \circ \chi_0)^{**}(u) + R_1 u$$

où $R_1 : H^{s,s'}_{\text{comp}}(K) \to H^{s,s'+\rho-1-\varepsilon}$.

Pour la conjugaison, si $h(x,\xi) \in \sum^m_{t,t'}(\tilde{\omega})$ et $u \in \varepsilon'(\tilde{\omega})$, $\operatorname{supp} u \subset K$, on a ($\psi_1 \in C_0^\infty \in (\tilde{\omega})$, $\psi_1 = 1$ près de K).

(10)
$$\chi^{**}(\psi_1 \Pi''_h u) = \Pi''_{h^*} \chi^{**}(u) + R_h u$$

où $h^* \in \sum^m_{\bar{t},\bar{t'}}$ avec $\bar{t} = \min\{t, \tau - 1\}$, $\bar{t'} = \min\{t' + t - \bar{t}, \tau' + \tau - 1 - \bar{t}\}$, et R_h envoie $H^{s,s'}_{\text{comp}}(K)$ dans $H^{s,s'+\rho(\bar{t},\bar{t'})-m-\varepsilon}$ pour tout $s' \leq 0$, $s' + \rho(\bar{t},\bar{t'}) > 0$, $s > \frac{1}{2}$, $s + s' > \frac{n}{2}$, et

$$\Pi''_h u = \sum_{pp'} (S_{p-N_0,p'-N_0} h)(x, D)\, u_{pp'}\ .$$

En utilisant la caractérisation des espaces $H^{s,s'}$ de [**8**], la démonstration de (9) et (10) est analogue à celle de [**1**]. Pour la linéarisation, on a :

LEMME 3.1.

Soit $u \in H^{s,s'}(\tilde\omega)$, $\operatorname{supp} u \subset K$, $s > \frac{1}{2}$, $s+s' > \frac{n}{2}+1$ *;* $\tau+\tau'+s' > \frac{3}{2}$, $s+s'+\tau' > \frac{3}{2}$*;* $s' \leq 0$, $\tau' \leq 0$ *et* $s'+\rho(\tau,\tau')-1>0$, $\tau'+\sigma>0$, *où* $\sigma = \min(\rho(s,s')-1, \rho(\tau,\tau'))$, *on a alors, pour* $\psi = 1$ *près de* $\chi^{-1}(K)$ *:*

$$u\circ\chi = \chi^{**}(u) + \Pi'_{(\nabla_{x'}u)\circ\chi}\psi\chi + g \tag{11}$$

avec $g \in H^{s,s'+\rho-1-\varepsilon} + H^{\tau,\tau'+\sigma}$.

Maintenant, pour $u \in H^{s,s'}(\tilde\omega_+)$ avec $\operatorname{supp} u \subset K_+ \subset\subset \tilde\omega_+$, et $\chi \in H^{\tau,\tau'}(\omega_+)$ un difféomorphisme de ω_+ dans $\tilde\omega_+$ du type précédent, on définit :

$$\chi^*(u) = \chi_1^{**}(u_1)\,\big|_{\omega_+} \tag{12}$$

où $\chi_1 \in H^{\tau,\tau'}(\omega)$, $u_1 \in H^{s,s'}(\tilde\omega)$ sont des prolongements de χ et u.

D'après (11) les différents prolongements de χ et u ne modifient χ^* que par une fonction de classe $H^{s,s'+\rho-1-\varepsilon}+H^{\tau,\tau'+\sigma}$, et si $u \in H^{s,s'}(\tilde\omega_+)\cap H^{s,\delta}_{(x_0,\xi'_0)}$, on a alors

$$\chi^*(u) \in H^{s,s'}(\omega_+)\cap\left\{H^{s,\delta}_{(y_0,\eta'_0)} + H^{s,s'+\rho-1-\varepsilon}_{(y_0,\eta'_0)} + H^{\tau,\tau'+\sigma}_{(y_0,\eta'_0)}\right\}$$

où $(y_0,\eta'_0) = \left(\chi^{-1}(x_0), \frac{\partial\theta'}{\partial x'}(x_0)\xi'_0\right)$.

Donc pour démontrer le théorème 2.1, il suffit de combiner les équations (5), (7) et (10). Finalement, à l'aide du calcul paradifférentiel, on peut aussi éliminer le terme Π'_{a_1}, et obtenir une équation paradifférentielle canonique

$$Pv = D_1^2 u + R(x,D')v = f_1 \in H^{s+\rho-3-\varepsilon}(\omega_+)\ . \tag{13}$$

On va donc démontrer le théorème 1.1 pour cette équation.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1:

Dans ω_+, le symbole principal $p(x,\xi)$ de P est égal à $\xi_1^2 - r(x,\xi')$, et $G = \{x_1 = \xi_1 = 0\}$; en posant $r_j(x',\xi') = \frac{\partial^j r}{\partial x_1^j}(0,\chi',\xi')$, on a encore :

$$G_d = \Big\{(0,x',0,\xi')\ ;\ \ r_0 = 0\ ,\ \ r_1(x',\xi') > 0\Big\}\ ,$$

$$G_g = \Big\{(0,x',0,\xi')\ ;\ \ r_0 = 0\ ,\ \ r_1(x',\xi') < 0\Big\}\ ,$$

$$G^3 = \Big\{(0,x',0,\xi')\ ;\ \ r_0(x',\xi') = r_1(x',\xi') = 0\Big\}\ ,$$

$H_p^G = -H_{r_0}$ sur G, et $r_1(\beta_{\alpha^0}(t)) = H_p^2\varphi(\beta_{\alpha^0}(t)) = e(t)$. Pour $\alpha^0 \in G^*$, $e(t)$ est alors monotone dans un voisinage de $\mathbf{R}_+$, et la proposition 24.3.8 de [4] donne la :

PROPOSITION 4.1.

Soit $\gamma(t)$ un arc de bicaractéristique généralisée, $\gamma(t_0) \in G^*$. On a alors sur chaque demi-voisinage de t_0, ou bien $\beta_{\alpha^0}(t) \in G_g \cup G^*$ avec $\gamma(t) = \beta_{\alpha^0}(t - t_0)$, ou bien $\beta_{\alpha^0}(t) \in G_d$ avec $\gamma(t) = \exp(tH_p)\gamma(t_0)$.

Cette proposition donne aussi l'existence et l'unicité locale d'une bicaractéristique généralisée issue des points de G^*.

Soit Γ une courbe bicaractéristique généralisée avec $\Gamma \cap \{G^3 \setminus G^*\} = \phi$, $\alpha_0, \alpha \in \Gamma$. Supposons $v \in H^{s'}_{\alpha_0}$ où $s' < 2s - 4 - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$, $v \in H^{s+\rho,-\rho}(\omega_+)$, $v(0, x') \in H^{s'}(\partial\omega_+)$. On va démontrer $v \in H^{s'-\delta}_\alpha$. Supposons que α est proche de α_0, d'après la proposition 4.1, on a ($[\alpha_0, \alpha]$ désigne un intervalle de Γ) l'un des cas suivants :

(i) $[\alpha_0, \alpha] \subset T^*\mathring{\omega}_+$

(ii) $[\alpha_0, \alpha]$ est un arc de courbe de gliding

(iii) $[\alpha_0, \alpha] \setminus \alpha \subset T^*\mathring{\omega}_+$, et dans ce cas là, on a :

- a) $\alpha \in H$
- b) $\alpha \in G_d$
- c) $\alpha \in G^*$ et $\beta_\alpha(t) \in G_d$ pour $t > 0$ petit.

Pour (i), on utilise le théorème de J-M. BONY [2], pour (ii) et (iii) b) les théorèmes 2.7 et 2.10 de [5] (avec l'indice correct). Pour (iii) a), on applique le théorème de [8].

Il nous reste à étudier le cas (iii) c). D'après la proposition 4.1, $\gamma(t) = \exp(tH_p)\alpha$. Notons $\gamma_\varepsilon(t) = \exp(tH_p)\beta_\alpha(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Comme $p \in C^2$, il résulte de la théorie des équations différentielles ordinaires que γ_ε approche uniformément $\gamma(t)$ quand $\varepsilon \to 0$. D'autre part, $u \in H^{s'}_\nabla$, ∇ étant un voisinage conique de α_0 : il existe alors $\varepsilon_0 > 0$, et $t_1 > 0$ tels que $\gamma_{\varepsilon_0}(t_1) \in \nabla$. Puisque $\beta_\alpha(\varepsilon_0) \in G_d$, (iii) b) implique $u \in H^{s'-\delta}_{\beta_\alpha(\varepsilon_0)}$ (pour $\delta > 0$) ; on applique ensuite le théorème 6.5 de [5], et la régularité se propage le long de la courbe de gliding de $\beta_\alpha(\varepsilon_0)$ à $\beta_\alpha(0) = \alpha$.

Nous avons finalement démontré le théorème.

Bibliographie

[1] S. ALINHAC, *Paracomposition et opérateurs paradifférentiels,* Comm. P.D.E., 11 **(1986)**, 87-121.

[2] J-M. BONY, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires,* Ann. Scien. Ecole Norm. Sup., 14 **(1981)**, 209-146.

[3] F. DAVID et M. WILLIAMS, *Singularities of solutions to semilinear boundary value problems,* Bull. A.M.S., 15 **(1986)**, 201-204.

[4] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators III,* Springer-Verlag **(1985)**.

[5] E. LEICHTNAM, *Régularité microlocale pour des problèmes de Dirichlet non linéaires non caractéristiques d'ordre deux à bord peu régulier,* Bull. Soc. Math. France, 115 **(1987)**, 457-489.

[6] R. MELROSE et J. SJÖSTRAND, *Singularities of boundary value problems I,* Comm. Pure Appl. Math., 31 **(1978)**, 593-617.

[7] L. NIRENBERG, *Lectures on linear partial differential equations,* Reg. Conf. Ser. Math., n° 17, Ams **(1973)**.

[8] M. SABLÉ-TOUGERON, *Régularité microlocale pour des problèmes aux limites non linéaires,* Ann. Inst. Fourier, 36 **(1986)**, 39-82.

[9] C.J. XU, *Opérateurs sous elliptiques et régularités des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires du second ordre dans* $\mathbf{R}^2$, Comm. P.D.E., 11 **(1986)**, 1575-1603.

Département de Mathématiques, Université de Wuhan, Wuhan - CHINE (R.P.)